A elipse

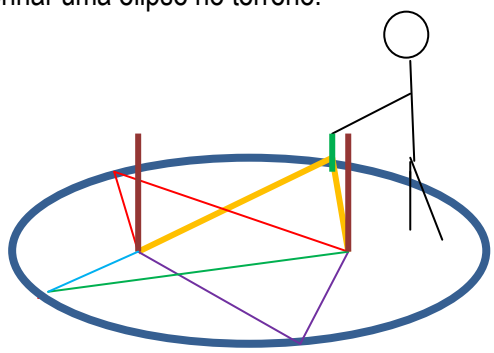
Uma curva no plano é uma elipse se e só se existirem dois pontos F1 e F2, chamados focos, tais que a soma das distâncias de qualquer ponto da curva aos focos é constante, suponhamos igual a d, ou seja a elipse é o conjunto:

$$E = \{P \in Plano: d(P, F_1) + d(P, F_2) = d\}$$

Desta propriedade deduz-se um método simples para construir uma elipse: o chamado **método do jardineiro.**

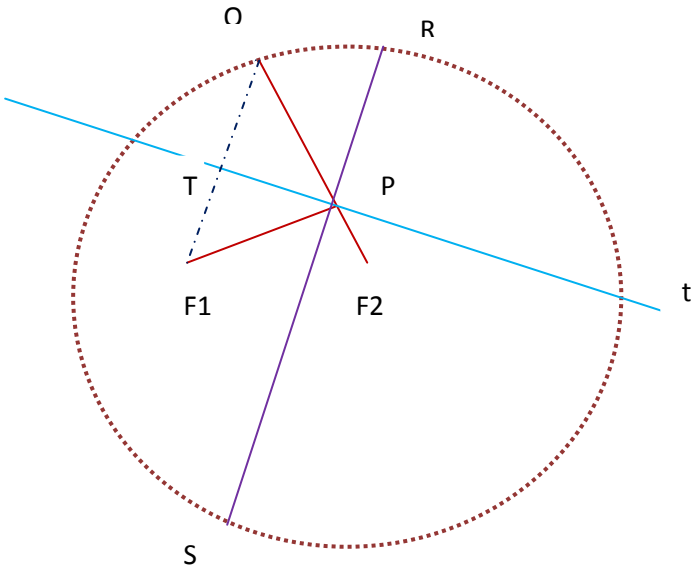
Fixam-se dois pontos no plano ou duas estacas no chão.

Amarra-se um fio, de comprimento superior à distância entre os pontos, a duas estacas (a castanho na figura); estica-se o fio com um pau (a verde) e desloca-se esse pau mantendo o fio esticado: ele vai desenhar uma elipse no terreno.



Uma extraordinária propriedade das elipses

Suponhamos que os focos de uma elipse são F1 e F2 e P é um ponto dessa elipse (ver figura abaixo).



Se P pertence à elipse, prolongando $[F_2P]$ e tomando Q sobre esse prolongamento de modo que $\overline{F_1P} = \overline{PQ}$, P pertence à mediatriz t de $[F_1Q]$.

De modo análogo se reconhece que dado Q pertencente à circunferência de centro em F_2 e raio d o ponto P intersecção da mediatriz t de $[F_1Q]$ com $[F_2Q]$ pertence à elipse.

Repare que isto fornece um novo método de desenhar uma elipse a que voltaremos no fim deste artigo.

De momento estamos interessados em saber o que aconteceria a um raio de luz disparado de F_1 em relação ao ponto P da elipse se esta fosse uma linha reflectora.

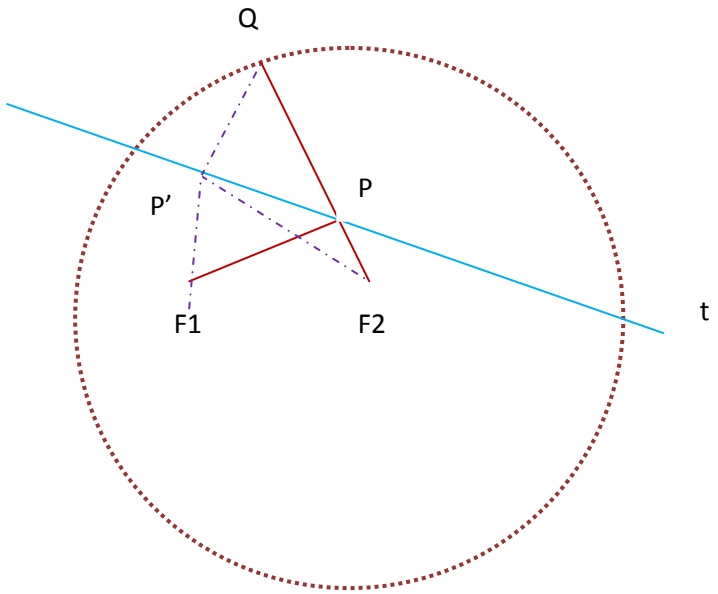
Começamos por notar que sendo $[RS]$ perpendicular a t, como é $\sphericalangle F_1PT = \sphericalangle TPQ$ então, e atendendo a que $t \perp RS$, $\sphericalangle F_1PS = \sphericalangle RPQ$; e como os ângulos $\sphericalangle RPQ$ e $\sphericalangle F_2PS$ são verticalmente opostos e portanto iguais temos finalmente que $\sphericalangle F_1PS = \sphericalangle F_2PS$.

Se tomarmos a recta t como linha reflectora o raio reflecte-se passando por F_1.

Mas nós sabemos que quando um raio incide sobre uma elipse num ponto ele se reflecte como se incidisse sobre a tangente à elipse nesse ponto.

Assim se mostrarmos que t é a tangente à elipse de focos F_1e F_2 ficamos a saber que um raio de luz disparado de um dos focos se reflecte passando pelo outro.

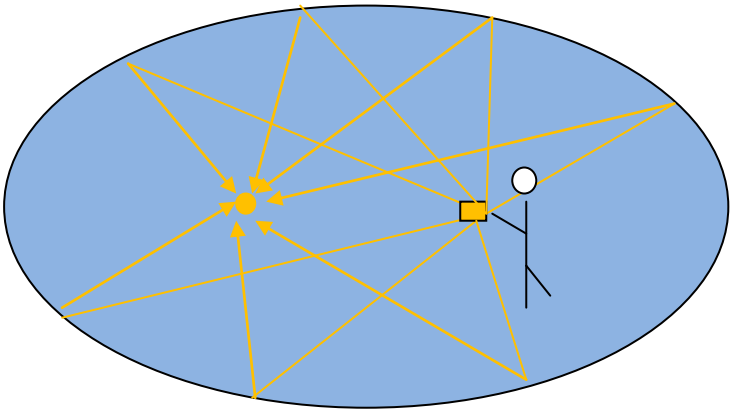
Mas uma recta é tangente a uma elipse se e só se um dos seus pontos P pertence à elipse e os outros estão fora da elipse pois distam dos dois focos de valores cuja soma é superior ao que se obtém para os pontos da cónica (fazemos notar ao leitor que existe uma única recta nestas condições: pode ver uma sugestão para a demonstração no fim deste artigo; as restantes rectas que passam por P têm pontos dentro e fora da elipse e intersectam-na em dois pontos).



Agora a argumentação é idêntica à que fizemos na resolução Problema do Voo do Pássaro: Se $P' \in t$ o comprimento da poligonal $F_1P'F_2$ é igual ao de $QP'F_2$ superior ao do segmento $[QF_2]$ que é d.

A recta t é pois a tangente à elipse em P.

Assim se de um dos focos lançarmos um raio de luz (ou uma bola de bilhar) "contra a elipse", ele reflecte-se passando pelo outro foco.



No Pavilhão do Conhecimento existe um bilhar elíptico: tem um buraco num dos focos da elipse. Uma bola colocada no outro foco e atirada em qualquer direcção, se for lançada sem efeito, vai cair no buraco.

Sugestão:

Comece por notar que, conforme provámos, para cada recta do plano que não passa pelos focos há um, e um só, ponto para o qual a soma das distâncias aos focos é inferior à mesma soma para qualquer outro ponto da recta sendo que para esse outro ponto existe um pequeno segmento nele centrado onde de um lado a soma das distâncias é inferior e do outro superior à mesma soma para esse ponto.

Mostre agora que se P é, para uma dada recta, esse ponto de mínimo então não é o ponto de mínimo para qualquer outra recta que passe por P.

Finalmente conclua se uma recta t contém um ponto P da elipse e todos os outros pontos de t estão fora da elipse então todas as outras rectas que passam por P têm pontos dentro e fora da elipse.

Um Desafio e um Concurso

Com o objectivo de **estimular** entre os alunos do Secundário **o trabalho de conceber um instrumento para realizar uma função pré-definida e de o concretizar,** ou seja, de o "**fazer**" lançamos aqui o seguinte desafio:

*Construir **um traçador de elipses** com base no segundo método descrito neste artigo: não o método do jardineiro mas sim aquele que consiste em rodar de 360º em torno de um dos focos uma haste com comprimento igual à soma das distâncias dos pontos da elipse aos focos e, em cada posição, obter e intersecção dessa haste com a mediatriz do segmento cujos extremos são o outro foco e o extremo da haste.*

Há que desenhar o instrumento, escolher os materiais, montá-lo e testá-lo.

Depois enviem-nos: ***fotografias, um pequeno vídeo que o mostre em funcionamento bem como uma descrição da concepção e materiais escolhidos***.

A nossa intenção é classificá-los de acordo com os critérios que se usam para classificar uma obra de engenharia e premiar os três melhores.

Os critérios são, pela ordem indicada:

- **Funcionalidade**: devem traçar a elipse;

- **Robustez**: devem ser resistentes;

- **Aspecto**;

- **Economia**: entre dois em igualdade de circunstâncias de acordo com os critérios anteriores valorizaremos o de menor custo.

Prémios

1.º Prémio 3 livros; 2.º Prémio 2 livros; 3.º Prémio 1 livro.

De entre os livros que existem na loja da SPM, serão escolhidos os que melhor se adequarem à idade e preparação matemática dos premiados.

Será dada visibilidade neste site aos trabalhos premiados e aos autores.

Se os trabalhos se revelarem de qualidade poderão vir a ser expostos no Pavilhão do Conhecimento.

Envio de documentação e prazo

Enviem a documentação do vosso trabalho para : clubespm@gmail.com até 15 de Abril.