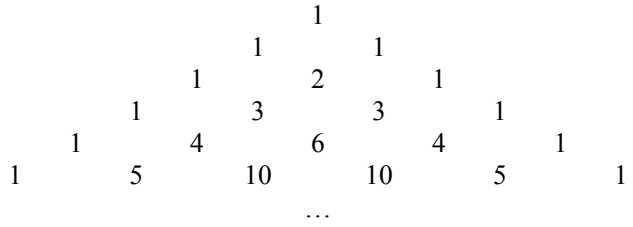
Título: O triângulo de Pascal e o binómio de Newton

O triângulo de Pascal é o seguinte triângulo numérico infinito:



A regra sobre como se passa de uma linha para a seguinte é simples: os extremos de cada linha têm o número 1 e todas as restantes entradas são a soma dos dois números mais próximos da linha imediatamente anterior. Assim, por exemplo, a terceira entrada da última das linhas que se podem ver acima é 10 pois 10 = 4 + 6.

Este triângulo tem muitas propriedades interessantes. Por exemplo, quem calcular as somas das várias linhas horizontais da parte do triângulo que se pode ver acima obterá os valores 1, 2, 4, 8, 16 e 32. Isto continua assim: as somas das linhas horizontais do triângulo de Pascal são as potências de dois (note-se que $1 = 2^0$). Por outro lado, se se somarem alternadamente os números de cada linha, ou seja, se se tomar o primeiro menos o segundo mais o terceiro e assim sucessivamente, vai-se obter sempre 0, excepto na linha de cima.

Para prosseguir, convém numerar as linhas horizontais do triângulo de Pascal a partir de 0. Com esta convenção, a soma dos números da n-ésima linha é 2^n. Os elementos da n-ésima linha vão ser representados, da esquerda para a direita, por $C(n,0)$, $C(n,1)$, …, $C(n,n)$. Há duas maneiras naturais de encarar estes números, que são independentes do triângulo de Pascal. Uma é dada pela fórmula:

$$C(n,k) = {}^{n!}/_{(k!(n-k)!).}$$

Posto de outro modo, $C(n,k)$ é o produto de todos os números de $k + 1$ até n dividido pelo produto de todos os números de 1 até k. Por exemplo, vê-se no triângulo de Pascal que $C(4,2) = 6$ e, de facto, o quociente de 3×4 por 1×2 é igual a 6. Outra maneira de encarar $C(n,k)$ consiste em ver este número como sendo o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos. Voltando ao exemplo anterior, $C(4,2) = 6$ pois o conjunto {1,2,3,4} tem seis subconjuntos com 2 elementos:

{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4} e {3,4}.

Uma das mais conhecidas fórmulas que envolvem o triângulo de Pascal é o binómio de Newton: se a e b forem números, então

$$(a + b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n,n)b^n.$$

Os nomes Pascal e Newton parecem fazer sentido aqui. Afinal, quando Pascal morreu Newton tinha 20 anos, pelo que se poderia pensar que Pascal descobriu o triângulo de Pascal e que depois Newton obteve o binómio que tem o seu nome. Mas não foi nada disso que se passou! O triângulo de Pascal já era conhecido na China, na Índia e na Pérsia por volta do ano 1000. De facto, por essa altura já o matemático persa Al-Karaji conhecia mesmo o binómio de Newton e sabia como o demonstrar por indução. Isto não quer dizer que Pascal e Newton não tenham tido qualquer contribuição para estes tópicos. Pascal escreveu o *Tratado do triângulo aritmético*, onde estudava as propriedades do triângulo ao qual se dá agora o seu nome. Quanto a Newton, descobriu como atribuir um significado ao binómio homónimo quando o expoente não é um número natural.