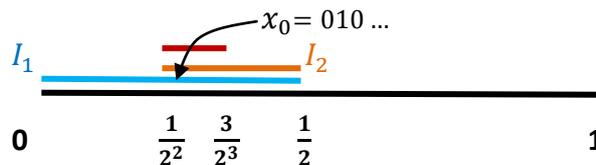


No nosso artigo de Janeiro (<http://www.clube.spm.pt/files/outros/jose%20veiga.pdf>) associámos de forma unívoca a cada x_0 de $[0,1[$ uma sucessão a_n da forma seguinte:

- i) Se $x_0 \in [0, \frac{1}{2}[$ é $a_1=0$ e $I_1 = [0, \frac{1}{2}[$; se $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1[$ é $a_1=1$ e $I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$
- ii) Depois partimos I_1 em dois intervalos semifechados à esquerda e de igual comprimento e se x_0 está no inferior esse será o I_2 e $a_2 = 0$; se está no superior esse será o I_2 e $a_2 = 1$ como se sugere na figura abaixo. E assim por diante...

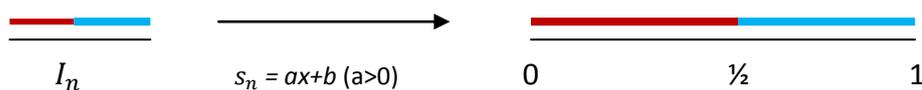


Pois é esta sucessão a_n que vamos usar para representar x_0 .

O que precisamos agora é de um método sistemático simples, ou se quisermos um algoritmo, para obter, os termos da sucessão a_n a partir de x_0 .

Um modo prático de proceder é obter a semelhança¹ s_n que transforma cada um dos intervalos I_n em $[0,1[$ (ver figura abaixo).

Depois descobrir qual é o transformado de x_0 por essa semelhança e multiplicá-lo por 2: se o resultado for menor do que um x_0 está na parte inferior de I_n e $a_{n+1} = 0$ se for maior ou igual a um está na metade superior e $a_{n+1} = 1$.



Ora isto pode ser conseguido de forma muito simples.

Vamos então tentar obter a_1 : temos de ver se x_0 está metade inferior ou superior de $[0,1[$. Para isso basta multiplicar x_0 por 2 e ver se $2x_0 < 1$.

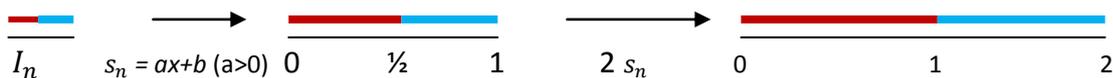
¹ Uma semelhança é uma aplicação definida por uma expressão $y=ax+b$ com $a > 0$; é muito fácil reconhecer que existe uma única que transforma um intervalo limitado noutra: o a acerta o comprimento do intervalo e o b a posição.

Para obter a_2 precisamos da semelhança s_1 que transforma I_1 em $[0,1[$:

- i) se $a_1 = 0$ x_0 está em $[0, \frac{1}{2}[$ e então $I_1 = [0, \frac{1}{2}[$ e $s_1(x) = 2x$ pelo que agora o que **temos de ver é se $2^2 x_0 < 1$** para decidir que x_0 está em $[0, \frac{1}{2^2}[$ ou em $[\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}[$ no caso contrário.
- ii) se $a_1 = 1$ x_0 está em $[\frac{1}{2}, 1[$ e então $I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$ e $s_1(x) = 2x - 1$ pelo que agora o que **temos de ver é se $2(2x_0 - 1) < 1$** para decidir que x_0 está em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}[$ ou em $[\frac{3}{2^2}, 1[$ no caso contrário.

E está identificado um algoritmo que nos permite obter para x_0 os termos da sucessão a_n que o vai representar: repare que conhecida a semelhança s_n que transforma I_n em $[0,1[$ para obter a que transforma I_{n+1} em $[0,1[$ basta (*ver figura abaixo*):

- i) multiplicar s_n por 2 se x_0 está na metade inferior de I_n ;
- ii) multiplicar s_n por 2 e subtrair 1 no outro caso.



Assim ao multiplicarmos $s_n(x_0)$ por 2 para decidir em qual das partes de I_n se encontra obtemos a_{n+1} e facilmente $s_{n+1}(x_0)$ de acordo com o algoritmo:

- i) $2 s_n(x_0) < 1 \rightarrow a_{n+1} = 0$ e $s_{n+1}(x_0) = 2 s_n(x)$;
- ii) $2 s_n(x_0) \geq 1 \rightarrow a_{n+1} = 1$ e $s_{n+1}(x_0) = 2 s_n(x_0) - 1$.

Vejamos o algoritmo em ação para obter a representação binária de 0,3:

$$2 \times 0,3 = 0,6 < 1 \rightarrow a_1 = 0; \quad 2 \times 0,6 = 1,2 > 1 \rightarrow a_2 = 1;$$

$$2 \times (1,2-1) = 0,4 < 1 \rightarrow a_3 = 0; \quad 2 \times 0,4 = 0,8 < 1 \rightarrow a_4 = 0;$$

$$2 \times 0,8 = 1,6 > 1 \rightarrow a_5 = 1; \dots$$

Mas como $1,6 - 1 = 0,6$, valor que usámos para obter a_2 , é $a_6 = a_2$ e obtivemos um período.

E temos a representação: $0,3 = 0(1001)$.

Verificação: Se estiver familiarizado com a noção de série geométrica² pode confirmar calculando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^2} \frac{1}{2^{4(n-1)}} + \frac{1}{2^5} \frac{1}{2^{4(n-1)}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2^5} \frac{1}{2^{4(n-1)}}$$

$$0,0(1000) + 0,0(0001) = 0,0(1001)$$

² Expressão da forma $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ que valor igual a $\frac{1}{1-r}$ se (e só se) $|r| < 1$.

E já agora como representar 57,3:

i) Obtemos uma representação binária para 57 :

$$57 = 2 \times 28 + 1 ; 28 = 2 \times 14 + 0 ; 14 = 2 \times 7 + 0 ; 7 = 2 \times 3 + 1 ; 3 = 2 \times 1 + 1$$

$$\text{Então: } 57 = 111001$$

ii) Finalmente: $57,3 = 111001,0(1001)$

Desafio:

Deixamos como desafio ao leitor mostrar que todo o número racional tem uma representação binária periódica tal como acontecia com a representação por dízimas. A inversa também é verdadeira e pode constituir um desafio adicional se estiver familiarizado com a noção de série geométrica³.

³ Ver nota 2