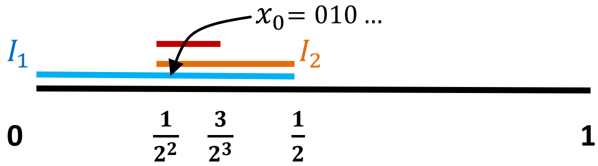
Uma representação binária para os Reais

por José Veiga de Faria

No nosso artigo de Outubro (*que pode ver aqui*) associámos de forma unívoca a cada x_0 de $[0,1[$ uma sucessão a_n da forma seguinte:

i) Se $x_0 \in [0,\frac{1}{2}[$ é a_1=0 e $I_1 = [0,\frac{1}{2}[$; se $x_0 \in [\frac{1}{2},1[$ é a_1=1 e $I_1 = [\frac{1}{2},1[$

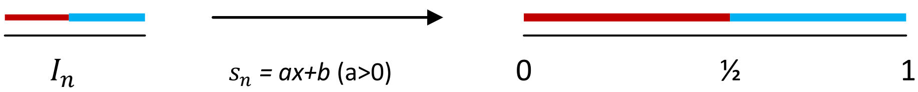
ii) Depois partimos I_1 em dois intervalos semifechados à esquerda e de igual comprimento e se x_0 está no inferior esse será o I_2 e $a_2 = 0$; se está no superior esse será o I_2 e $a_2 = 1$ como se sugere na figura abaixo.
E assim por diante...



Pois é esta sucessão a_n que vamos usar para representar x_0.
O que precisamos agora é de um método sistemático simples, ou se quisermos um algoritmo, para obter, os termos da sucessão a_n a partir de x_0.

Um modo prático de proceder é obter a semelhança[1] s_n que transforma cada um dos intervalos I_n em $[0,1[$ (*ver figura abaixo*).

Depois descobrir qual é o transformado de x_0 por essa semelhança e multiplicá-lo por 2: se o resultado for menor do que um x_0 está na parte inferior de I_n e $a_{n+1} = 0$ se for maior ou igual a um está na metade superior e $a_{n+1} = 1$.



Ora isto pode ser conseguido de forma muito simples.
Vamos então tentar obter a_1: temos de ver se x_0 está metade inferior ou superior de $[0,1[$.
Para isso basta multiplicar x_0 por 2 e ver se $2x_0 < 1$.

[1] Uma semelhança é uma aplicação definida por uma expressão *y=ax+b* com *a > 0*; é muito fácil reconhecer que existe uma única que transforma um intervalo limitado noutro: o *a* acerta o comprimento do intervalo e o *b* a posição.

Para obter a_2 precisamos da semelhança s_1 que transforma I_1 em [0,1[:

i) se $a_1 = 0$ x_0 está em $[0,\frac{1}{2}[$ e então $I_1 = [0,\frac{1}{2}[$ e $s_1(x) = 2x$ pelo que agora o que **temos de ver é se $2^2 x_0$ < 1** para decidir que x_0 está em $[0,\frac{1}{2^2}[$ ou em $[\frac{1}{2^2},\frac{1}{2}[$ no caso contrário.

ii) se $a_1 = 1$ x_0 está em $[\frac{1}{2},1[$ e então $I_1 = [\frac{1}{2},1[$ e $s_1(x) = 2x - 1$ pelo que agora o que **temos de ver é se $2(2x_0 - 1)$ < 1** para decidir que x_0 está em $[\frac{1}{2},\frac{3}{2^2}[$ ou em $[\frac{3}{2^2},1[$ no caso contrário.

E está identificado um algoritmo que nos permite obter para x_0 os termos da sucessão a_n que o vai representar: repare que conhecida a semelhança s_n que transforma I_n em [0,1[para obter a que transforma I_{n+1} em [0,1[basta (*ver figura abaixo*):

i) multiplicar s_n por 2 se x_0 está na metade inferior de I_n ;
ii) multiplicar s_n por 2 e subtrair 1 no outro caso.

Assim ao multiplicarmos $s_n(x_0)$ por 2 para decidir em qual das partes de I_n se encontra obtemos a_{n+1} e facilmente $s_{n+1}(x_0)$ de acordo com o algoritmo:

i) $2\, s_n(x_0) < 1 \rightarrow a_{n+1} = 0$ *e* $s_{n+1}(x_0) = 2\, s_n(x)$;
ii) $2\, s_n(x_0) \geq 1 \rightarrow a_{n+1} = 1$ *e* $s_{n+1}(x_0) = 2\, s_n(x_0) - 1$.

Vejamos o algoritmo em ação para obter a representação binária de 0,3:

2 x 0,3 = 0,6 < 1 → $a_1 = 0$;

2 x 0,6 = 1,2 > 1 → $a_2 = 1$;

2 x (1,2-1) = 0,4 < 1 → $a_3 = 0$;

2 x 0,4 = 0,8 < 1 → $a_4 = 0$;

2 x 0,8 = 1,6 > 1 → $a_5 = 1$; ...

Mas como 1,6 – 1 = 0,6, valor que usámos para obter a_2, é $a_6 = a_2$ e obtivemos um período.

E temos a representação: 0,3 = 0(1001).

Verificação: Se estiver familiarizado com a noção de série geométrica[2] pode confirmar calculando:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^{4(n-1)}} + \frac{1}{2^5}\frac{1}{2^{4(n-1)}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{2^5}\frac{1}{2^{4(n-1)}}$$

0,0(1000) + 0,0(0001) = 0,0(1001)

---

[2] Expressão da forma $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ que valor igual a $\frac{1}{1-r}$ se (e só se) |r| < 1.

E já agora como representar 57,3:

i) Obtemos uma representação binária para 57 :

57 = 2 x 28 + 1 ; 28 = 2 x 14 + 0; 14 = 2 x 7 + 0; 7 = 2 x 3 + 1; 3 = 2 x 1 +1

Então: 57 = 111001

ii) Finalmente: 57,3 = 111001,0(1001)

Desafio:

Deixamos como desafio ao leitor mostrar que todo o número racional tem uma representação binária periódica tal como acontecia com a representação por dízimas.
A inversa também é verdadeira e pode constituir um desafio adicional se estiver familiarizado com a noção de série geométrica[3].

[3] Ver nota 2