

Problema 2: Resolução

1.º desafio:

Repare caro leitor/a nas seis chávenas (taça/pires) alinhadas:



O leitor/a facilmente reconhecerá que, para a partir desta sequência obter um conjunto de seis chávenas X_{dif} , é condição necessária trocar as taças de forma que nenhuma fique no mesmo lugar:



Acontece que, como a parte exterior e interior das taças têm cores diferentes e quaisquer duas chávenas (taça/pires) não têm cores comuns a condição também é suficiente.

Então o número pedido é o número formas de trocar as seis taças, mudando-as de pires, de forma a que nenhuma fique no mesmo lugar. Vamos chamar a este número Π_6^1 .

Agora repare: a taça T sobre o pires amarelo tem de mudar de pires e pode fazê-lo de cinco formas diferentes. Suponhamos que vai para cima do pires laranja:



¹ Chamamos Π_N ao número formas de trocar N taças, mudando-as de pires, de forma a que nenhuma fique no mesmo lugar.

Podem dar-se dois casos:

- i) A taça T troca com a taça do pires laranja e neste caso se mantivermos estas fixas e trocarmos as restantes quatro de forma que nenhuma taça fique em cima do mesmo pires temos conjuntos de chávenas X_{dif} ; o número de conjuntos neste caso é de Π_4 ;
- ii) A taça T troca com a taça do pires laranja mas esta não fica em cima do pires amarelo: mantendo T fixa, se trocamos as restantes cinco de forma que nenhuma taça fique em cima do mesmo pires, obtemos Π_5 conjuntos de chávenas X_{dif} .

Como a chávena amarela pode ocupar cinco posições temos:

$$\Pi_6 = 5[\Pi_4 + \Pi_5]$$

É fácil reconhecer que este resultado é independente do número de chávenas.

Assim para N chávenas, com $N > 4$, é: $\Pi_N = (N - 1)[\Pi_{N-2} + \Pi_{N-1}]$

É uma fórmula de recorrência que nos permite conhecer qualquer Π_N se soubermos Π_2 e Π_3 .

Mas: $\Pi_2 = 1$ e $\Pi_3 = 2$ como é óbvio por contagem direta.

Então: $\Pi_4 = 3[\Pi_2 + \Pi_3] = 9$, $\Pi_5 = 4[\Pi_3 + \Pi_4] = 44$ e finalmente:

$$\Pi_6 = 5[\Pi_4 + \Pi_5] = 265$$

2.º desafio:

Em cima de cada um dos seis pires podemos colocar cinco taças: logo o número é 30.