O **Princípio de Indução**

O João tem uma infinidade de portas para pintar.

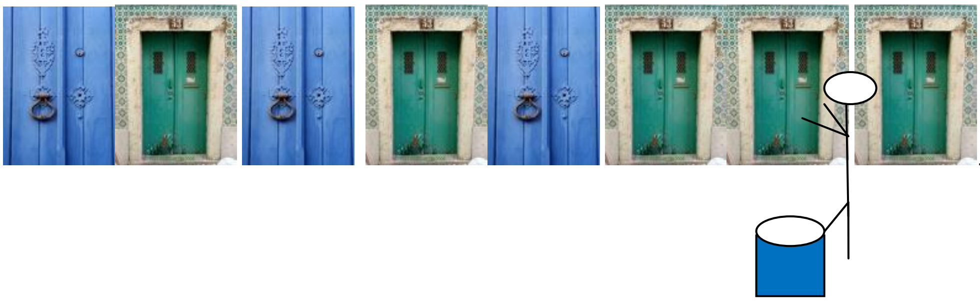
 …….

Disseram-lhe que aquele conjunto de portas pode ser “numerado” pelo conjunto N dos naturais, isto é, atribuir a uma porta o número 1 para passar a ser a Porta 1 ou P(1), a outra diferente o número 2 para passar a ser a Porta 2 ou P(2), a outra diferente das anteriores o número 3 para passar a ser a Porta 3 ou P(3) e assim por diante de forma a usar todos os números naturais e numerar todas as portas.

O problema que se lhe depara é o seguinte:

i) Não deixar nenhuma porta por pintar;
ii) Não pintar outras portas para além das que é suposto serem pintadas.

Alguém lhe disse para começar a pintar e ir pintando até acabar.

 ….

Achas boa ideia? Pensas que pode ajudar o João?

Se o conjunto de portas fosse finito com certeza que a ideia era perfeita; talvez só devêssemos dizer ao João para, antes de pintar uma porta, se certificar de que aquela era uma das que era suposto ser pintada não fosse ele pintar mais do que devia.

Mas não é o caso: o conjunto das portas é infinito…

Claro que tu que és rápido a pensar e irias dizer-lhe de imediato:

- Amigo desiste da tarefa. Cada porta leva no mínimo k horas a pintar e por isso vais precisar de nk horas para pintar n portas; mas este número nk pode tornar-se superior a qualquer valor, por exemplo 100 anos expressos em horas, o que significa que nunca vais acabar a tarefa.

Também outro que te suceda não o vai conseguir nem outro que suceda a esse e assim por diante.

Tarefa impossível por isso.

Mas vamos supor que o nosso pintor é eterno e que aceita a ideia que lhe demos.

E vamos ainda supor que, depois de numerar as portas, ele escolhe um método para escolher a próxima porta a pintar.

Começa em P(1) e passa de porta ímpar para porta ímpar: pinta P(1), depois P(3), depois P(5), e assim por diante.

P(1) **P(2)** **P(3)** **P(4)** **P(5)** **P(6)** **P(7)** **P(8)** **P(9)** **P(10)** ….

Achas que vai conseguir pintar as portas todas?

Obviamente que não: as pares nunca serão pintadas porque ele nunca vai voltar atrás.

Se o João se lembra de que falhou porque "saltou portas" e resolve começar numa porta e passar para a seguinte ainda assim pode falhar. Imagina que começa em P(3), passa para P(4), depois para P(5) e assim por diante:

P(1) **P(2)** **P(3)** **P(4)** **P(5)** **P(6)** **P(7)** **P(8)** **P(9)** **P(10)** ….

Deixa as duas primeiras por pintar.

Haverá então algum critério que possamos dar ao João e que lhe permita pintar todas as portas que numerou e só essas?

Há e acho que já estás a ver qual é.

Vamos dizer-lhe:

- Pinta a primeira porta P(1);

- Depois de pintares uma porta passa para a seguinte: depois de P(n) pinta P(n+1).

De facto se fizer isto o João vai pintar todas as portas que tem para pintar e só essas.

O que nos garante isso é o **Princípio de Indução.**

Ele estabelece que, se P(n) é uma proposição que depende de um n natural (n = 1, 2, 3, …) então:

i) Se P(1) é verdadeira (***1 chama-se a Base de Indução***)

e se

ii) Sendo P(n-1) verdadeira então P(n) é verdadeira (***Hereditariedade de P(n)***)

então:

P(n) é verdadeira para todo o n natural.

Vamos tentar expor a ideia de outra forma.

Suponhamos que no conjunto dos números naturais

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

vamos representar a verde os n para os quais P(n) é verdadeira.

Se para 1 a proposição é verdadeira temos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

Agora se provarmos que, sendo n verde, n+1 também é verde então 2 será verde

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

Depois, sendo 2 verde, 3 também será

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

depois 4 , etc… isto é o verde propaga-se a todo os naturais:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

NOTA - A Base de Indução pode ser um inteiro qualquer z (por exemplo 10, -3 ou –10)
Neste caso se P(z) é verdadeira e se a propriedade é Hereditária então
P(n) é verdadeira para todos os inteiros maiores ou iguais a z.

Exemplos de aplicação:

1.

Suponhamos que queremos provar que a igualdade:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3} \qquad (1)$$

é verdadeira para todo o n natural.

Podemos tomar 1 para **base de indução**.

Para n=1 a igualdade fica: $1^2=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ que facilmente reconheces que é verdadeira.

Suponhamos agora como **hipótese de indução** que a igualdade (1) acima é verdadeira.

Há que provar que, então, a igualdade é verdadeira para n+1 isto é que:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}+\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}$$

Chama-se a esta igualdade a **tese de indução**.

Vamos então prová-lo.

Sabemos que: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}$ pela hipótese de indução.

Somando $(n+1)^2$ a ambos os membros obtemos:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}+(n+1)^2$$

Mas:

$$\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}+(n+1)^2=\frac{13n}{3}+\frac{3n^2}{2}+\frac{n^3}{3}+1=\frac{n+1}{6}+\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}$$

como facilmente reconheces fazendo as contas.

Mas isto era o que queríamos provar.

2.

Vamos provar que se um conjunto tem n elementos (n = 0, 1, 2, 3, …) então tem 2^n subconjuntos.

i) **Base de indução**: 0

Se C tem zero elementos é vazio logo só tem um subconjunto : o vazio.

Então o número de subconjuntos é $2^0 = 1$.

i) Hereditariedade

Hipótese: Se um conjunto C tem n elementos então tem 2^n subconjuntos.

Tese: Se um conjunto C tem n+1 elementos então tem 2^{n+1} subconjuntos.

Prova:

Vamos escrever C como reunião de um conjunto de n elementos com um conjunto com um só elemento (chama-se singular) :

$$C = \{e1, \dots, en\} \cup \{a\}$$

E vamos então contar quantos subconjuntos tem C:

i) Primeiro os subconjuntos sem *a :*

São tantos quantos os subconjuntos de $\{e1, \dots, en\}$ *que tem n elementos logo por hipótese* 2^n *subconjuntos*;

ii) Depois os subconjuntos com *a:*

Há um para cada subconjunto B de $\{e1, \dots, en\}$ *:* $B \cup \{a\}$*; são portanto n os subconjuntos com a.*

Finalmente o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é:

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

q. e. d.

Deixamos agora o seguinte desafio:

TORRES DE HANÓI

Posição do problema:

a)

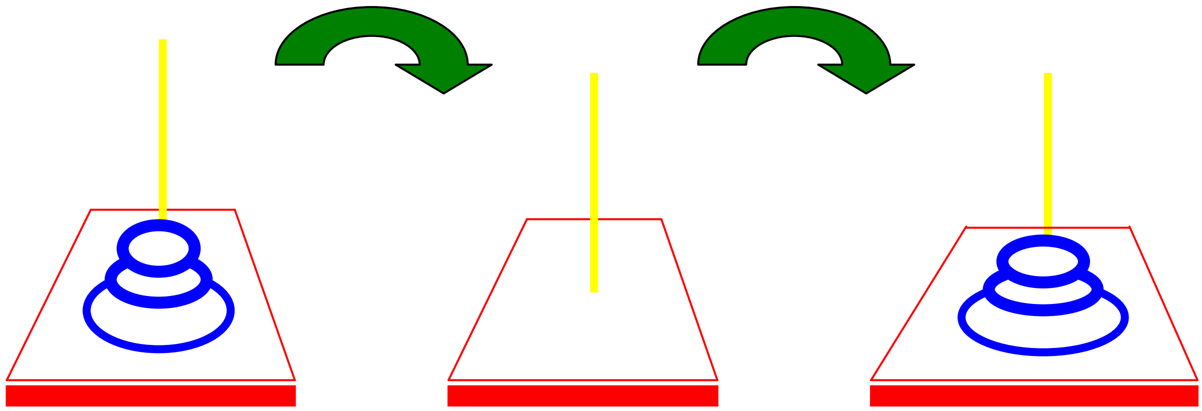
Os discos foram colocados por ordem decrescente de diâmetro no pino 1.

Trata-se de passá-los para o pino 3 de modo a ficarem igualmente ordenados e utilizando, se necessário, o pino 2 como ponto de passagem intermédio mas garantindo que sempre, em qualquer pino, a ordem referida se mantém.

Pretende-se provar, por indução, que se o número de discos é n > = 1 o número mínimo de movimentos é $2^n - 1$.

b) Descreva com detalhe a sequência de movimentos a fazer.

Pino 1: **Pino 2:** **Pino 3:**



.