Problema 2: Resolução

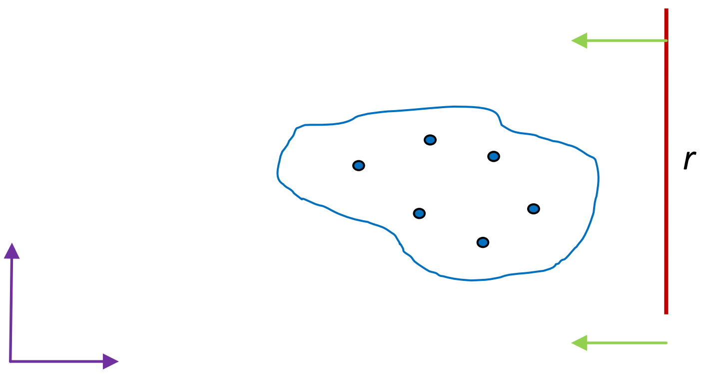
Resolução 1:

Considere o conjunto das retas que passam por, pelo menos, dois dos referidos pontos.

Este conjunto é finito: tem no máximo combinações de $10^{10^{10}}$ dois a dois elementos.

Então é finito o conjunto D dos declives dessas retas relativamente a um referencial previamente fixado.

Se *r* for uma reta (*a vermelho na figura*) com declive não pertencente a D nenhuma reta paralela a *r* contem mais de um dos pontos que colocámos dentro da curva.



Coloquemos então *r* numa posição em que não interseta a curva que delimita a nossa região.

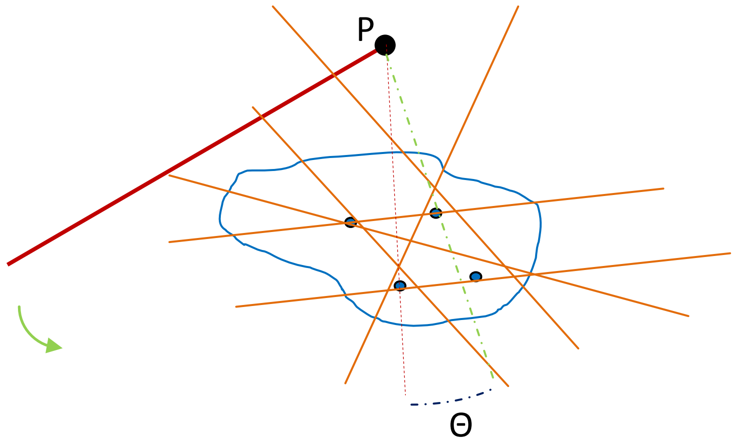
Se deslocarmos *r* paralelamente a si mesma de forma a atravessar a referida região ela vai passando um ponto de cada vez até estar sobre o ponto $\frac{10^{10^{10}}}{2}$.

Aí, chamando *d* à menor das distâncias dos pontos ainda não tocados a *r*, é $d > 0$.

Se a deslocarmos agora de $\frac{d}{2}$ no mesmo sentido ela fica numa posição em que deixa metade dos pontos de cada lado.

Resolução 2:

Imagine agora que traça todas as retas que unem dois pontos do nosso conjunto. Obtém um conjunto finito de retas.



Tomamos um ponto P fora da região limitada pela curva e que não pertença a qualquer das retas (*desafiamos o leitor mais interessado a fazer uma prova de que tal ponto existe*) e fazemos passar por P uma reta r que não intersete a curva.

Rodando r em torno de P de forma a atravessar a nossa região ela vai passando um ponto de cada vez até estar sobre o ponto $\frac{10^{10^{10}}}{2}$.

Agora, para cada ponto Q ainda não tocado, considero o ângulo que a reta que passa por P e por Q faz com *r*.

Sendo θ o menor[1] desses ângulos é θ > 0.

Se rodarmos agora r de $\frac{\theta}{2}$ no mesmo sentido em que vinha a deslocar-se ela fica numa posição em que deixa metade dos pontos de cada lado.

[1] O conjunto das medidas dos ângulos é finito e em qualquer conjunto de números reais finito e não vazio há um menor que todos os outros.