Resolução do problema 4

Para facilitar a resolução introduzimos uma operação muito simples:

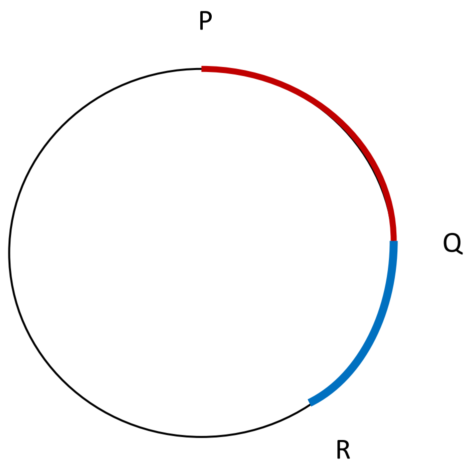
" Adição (+) de um ponto da circunferência de raio um com um número real"

Assim, se P pertence à circunferência e *a* é real, P + a = Q onde Q é o ponto da circunferência que se obtém fazendo P "andar" de um arco de comprimento *a*, no sentido dos ponteiros do relógio se *a* positivo e contrário se *a* negativo.

Assim se o arco PQ medir 0,8 e o arco QR 0,6 será (ver figura abaixo):

$$Q = P + 0{,}8 = R - 1{,}4$$

Exercício: Quais serão os pontos Q + 0,6 , R – 0,6 , (R – 1,4) + 0,8



Agora é fácil reconhecer estas três propriedades:

P1 : $(P + a) + b = P + (a+b)$

P2: $P = Q + a \Leftrightarrow P - a = Q$

P3: $P + a = P + b \Leftrightarrow b - a = 2k\pi$ (k inteiro)

Provamos P3:

$$P + a = P + b \Leftrightarrow (P + a) - a = (P + b) - a \Leftrightarrow P + (a - a) = P + (b - a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = P + (b - a) \Leftrightarrow b - a = 2k\pi \text{ (k inteiro)}$$

Podemos agora, facilmente, resolver os dois problemas propostos:

i) Se $q1 \neq q2$ com q1 e q2 racionais então:

$P + q1 = P + q2 \Leftrightarrow q2 - q1 = 2k\pi$ (k inteiro e não nulo) (por P3)

Isto é absurdo pois $q2 - q1$ é racional e $2k\pi$ é irracional.

ii) Suponhamos que algum Q pertence a [P] e a [P'].

Então $Q = P + q1 = P' + q2$ com q1 e q2 racionais.

Agora, sendo q um racional :

$R \ [P] \Leftrightarrow R = P + q = (Q - q1) + q = Q + (q - q1) = (P' + q2) + (q - q1) =$

$P' + (q - q1 + q2) \Rightarrow R \in [P']$

De modo análogo provávamos que, se $R \in [P']$, então $R \in [P]$.

Isto é, se [P] e [P'] têm um ponto comum são iguais como queríamos provar.