Nesta coluna pretendo partilhar todos os meses a minha opinião sobre questões relacionadas com a Matemática e com o seu ensino. Os leitores são convidados a comentar, com argumentos a favor ou contra, aliás é esse o objectivo desta coluna: discutir diferentes pontos de vista sobre o tema do artigo (dia 3 de cada mês).

José Carlos da Silva Pereira – Professor de Matemática, autor de livros escolares e responsável pelo site Recursos para Matemática. *Ler artigos anteriores* aqui.

Se e Só Se por José Carlos Pereira

Artigo de Março de 2015 – Dia 3

Clube SPM

Fechado ou Aberto?

O artigo deste mês é sobre uma questão que me é colocada várias vezes, tanto por alunos como por colegas. A questão é a seguinte:

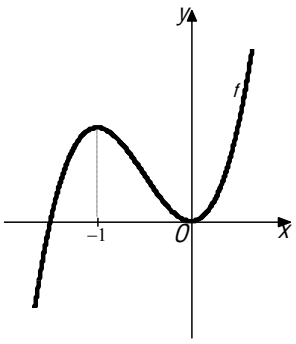
"Quando escrevemos os intervalos de monotonia de uma função, devemos fechar o intervalo ou deixá-lo aberto, nos pontos onde a função atinge um extremo?"

Normalmente começo por referir a definição de função monótona (crescente ou decrescente) num intervalo:

Diz-se que uma função f é crescente em $I \subset \mathrm{IR}$, respectivamente decrescente, se para quaisquer $a, b \in I$ tal que $a < b$ então $f(a) \leq f(b)$, respectivamente, $f(a) \geq f(b)$ [1].

e apoio-me sempre nesta definição para dar uma resposta a esta questão. Neste caso, penso que um exemplo concreto ajuda a perceber este conceito:

Consideremos então a função f, de domínio IR, definida por $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, cujo gráfico está parcialmente representado na figura:



Em que intervalos a função é crescente e decrescente?

---

[1] Diz-se que uma função f é estritamente crescente em $I \subset \mathrm{IR}$, respectivamente decrescente, se para quaisquer $a, b \in I$ tal que $a < b$ então $f(a) < f(b)$, respectivamente, $f(a) > f(b)$.

Tendo em conta a definição apresentada, a função é crescente em $]-\infty,-1]$, pois para quaisquer $a,b\in]-\infty,-1]$ tal que $a<b$, tem-se $f(a)\leq f(b)$. Pela mesma razão, f também é crescente em $[0,+\infty[$. Já no intervalo $[-1,0]$ a função f é decrescente, pois para quaisquer $a,b\in[0,1]$ tal que $a<b$, tem-se $f(a)\geq f(b)$. De referir que, apesar de a função ser crescente em $]-\infty,-1]$ e em $[0,+\infty[$, não o é em $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$. Por exemplo, $-\frac{5}{4}$ e $\frac{1}{4}$ pertencem a $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$ e $-\frac{5}{4}<\frac{1}{4}$ mas $f\left(-\frac{5}{4}\right)>f\left(\frac{1}{4}\right)$.

Depois de apresentar um exemplo deste tipo e de justificar, baseado na definição, a opção por fechar o intervalo, normalmente a questão que vem a seguir é esta (e vou continuar a usar este exemplo):

"Mas em $x=-1$ e em $x=0$ a função é crescente e decrescente?"

É uma pergunta típica que envolve uma interpretação errada do conceito de monotonia. A monotonia de uma função estuda-se num intervalo e não num ponto. Portanto não é correcto dizer que uma função é crescente ou decrescente num ponto.

Creio que esta confusão com a interpretação do conceito de monotonia está relacionada com o estudo da derivada de uma função. Sabemos que se a derivada de uma função for positiva num dado intervalo, respectivamente negativa, então a função é crescente nesse intervalo, respectivamente decrescente (no exemplo deste artigo a derivada de f é positiva em $]-\infty,-1[$ e em $]0,+\infty[$, negativa em $]-1,0[$ e nula em $x=-1$ e em $x=0$). Associam-se os intervalos onde a função derivada é positiva aos intervalos onde a função é crescente e os intervalos onde a função derivada é negativa aos intervalos onde a função é decrescente, deixando de fora os pontos onde a função atinge um extremo. Talvez esta seja razão principal que leve muitas pessoas a deixar o intervalo aberto. No entanto a monotonia de uma função não se define à custa do sinal da sua derivada, o seu estudo é "apenas" uma ferramenta poderosa que nos permite determinar os intervalos de monotonia. Uma chamada de atenção para o seguinte: muitas vezes diz-se que se a derivada de uma função é positiva, ou negativa, num dado ponto então a função é crescente, ou decrescente, nesse ponto. Pelo que aqui exposto, não é correcto dizê-lo, tratando-se apenas de um abuso de linguagem. Deve dizer-se que existe uma vizinhança do ponto onde a função é crescente, ou decrescente.

É claro que se uma função é monótona crescente ou decrescente num intervalo $[a,b]$ também é crescente ou decrescente em $]a,b[$, pois $]a,b[\subset[a,b]$. No entanto, penso que colocar o maior intervalo onde é válida a definição de função monótona, crescente ou decrescente, é a melhor opção.

Para terminar deixo algumas questões:

1. É possível uma função ser crescente e decrescente no mesmo intervalo?

2. É possível uma função ter um máximo relativo e um mínimo relativo no mesmo ponto?

3. É possível uma função ter um máximo absoluto e um mínimo relativo no mesmo ponto?

4. É possível uma função ter um máximo absoluto e um mínimo absoluto no mesmo ponto?

Para responder às três últimas é necessário ter em conta a definição de extremo relativo e absoluto.

Deixe a sua opinião e as suas respostas a estas questões na página do Facebook do Clube SPM.