



Nesta coluna pretendo partilhar todos os meses a minha opinião sobre questões relacionadas com a Matemática e com o seu ensino. Os leitores são convidados a comentar, com argumentos a favor ou contra, aliás é esse o objectivo desta coluna: discutir diferentes pontos de vista sobre o tema do artigo (dia 3 de cada mês).

José Carlos da Silva Pereira – Professor de Matemática, autor de livros escolares e responsável pelo site Recursos para Matemática. *Ver artigos anteriores aqui.*

Se e Só Se por José Carlos Pereira

Artigo de Junho de 2022 – Dia 3

Clube SPM

Um Pequeno Desabafo e o Exame

Há uns anos, quando eu era estudante, usávamos um teorema (1) para calcular um certo tipo de limites, que era o seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{P(x)} = +\infty, \text{ com } a > 1 \text{ e } P(x) \text{ um polinómio com o coeficiente do termo de maior grau positivo.}$$

Sem qualquer reserva, concluímos logo que o limite do inverso era 0, isto é que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0$$

Todos sabemos por que razão isto é verdade. Portanto, sempre que tínhamos um limite do tipo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x^3 + 3x^2 + 1}$$

podíamos escrever logo, sem qualquer outro cálculo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x^3 + 3x^2 + 1} = +\infty$$

Passado uns anos, o tal teorema “deu origem” a outro (2):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty, \text{ com } a > 1 \text{ e } p \in \mathbb{R}$$

Nessa altura ainda se podia concluir que o limite do inverso era 0. Assim, para calcular o limite acima já tínhamos de fazer alguns cálculos, algo como:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x^3 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x^3 \left(1 + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} = +\infty \times \frac{1}{1 + 0 + 0} = +\infty$$

Mais tarde já nem se podia concluir que o limite do inverso era 0, pelo que fomos obrigados a acrescentar uns truques ao cardápio.

Nos dias que correm, o tal teorema (1) foi "reescrito". Já só é válido quando $a = e$, ou seja, neste momento o teorema (3) é:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \quad p \in \mathbb{R}$$

Ou seja, podemos escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$, mas se for $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^3}$, já não podemos escrever que é igual a $+\infty$. Temos de acrescentar mais uns truques à ementa para podermos resolver este limite.

Quando digo que "só é válido", estou a falar no âmbito do Ensino Secundário, porque fora deste âmbito é o teorema (1) que vale. É quase como se houvesse duas Matemáticas, a Matemática Matemática, e a Matemática do Ensino Secundário. Talvez esteja a exagerar, mas às vezes é o que sinto.

Isto faz sentido? Faz sentido andarmos a ensinar truques, completamente desnecessários, para calcular um limite, quando sabemos o resultado e sabemos a razão do resultado? É isto ensinar Matemática?

A razão pela qual os teoremas (1), (2) e (3) são verdadeiros é exactamente a mesma. Se assim é, por que razão continuamos a fazê-lo desta forma?

Normalmente a frase "antigamente é que era bom" causa-me repulsa, por várias razões que não importam para aqui. Neste caso nem é bem o "antigamente é que era bom", é mais "antigamente é que fazia sentido"!

Acho que devemos fazer uma reflexão sobre o que faz ou não sentido exigir aos alunos no cálculo de limites. Eu sei que neste momento estamos de mãos e pés atados e de boca fechada. Temos de fazer como é exigido pelas "instâncias superiores", mas devia haver um limite para esta "loucura" instalada. O cálculo de limites passou a ser quase um tema central, quando deveria ser um auxílio para coisas mais importantes.

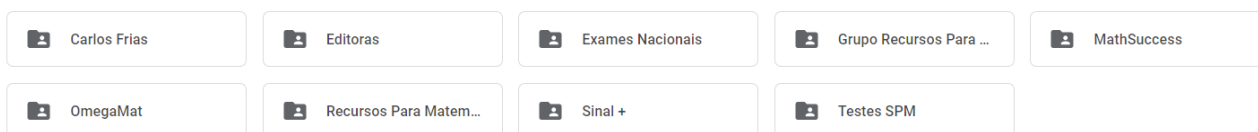
Com isto não se pense que defendo que o cálculo de limites pode ser feito com falta de rigor. Nada disso. Apenas defendo que se há maneiras mais simples e rigorosas para resolver um limite, não faz sentido não as aceitar. Muitas vezes somos obrigados a fazer coisas completamente supérfluas e que não acrescentam nada à aprendizagem.

Há outros tipos de limites que também merecem a nossa atenção, apenas escolhi este para ilustrar a minha opinião.

Para finalizar, e como estamos muito próximos do Exame Nacional de Matemática A, não podia terminar este texto sem escrever sobre a prova deste ano. A prova será, estruturalmente, semelhante à do ano passado. Terá doze itens cujas classificações das respostas serão obrigatoriamente contabilizadas na classificação final, destes, cinco serão de escolha múltipla (na prova do ano passado eram onze itens deste tipo com os mesmos cinco de escolha múltipla). O seu peso será de 158 pontos ($5 \times 12 + 7 \times 14$). Os itens opcionais serão seis e só os três com as respostas melhor pontuadas contribuirão para a classificação final (na prova do ano passado eram sete itens deste tipo e só os quatro melhor pontuados contribuíram para a classificação final). O seu peso será de 42 pontos (3×14). Estas e outras informações podem ser consultadas [aqui](#).

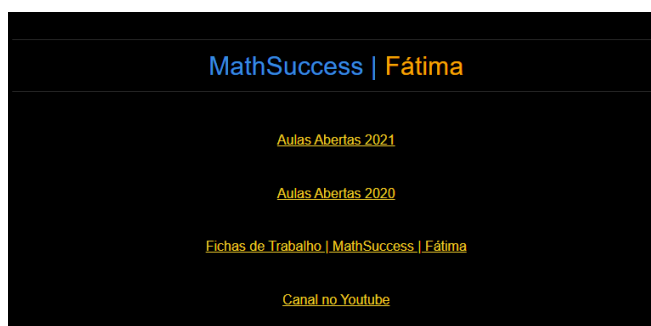
Para os alunos que vão realizar o Exame Nacional de Matemática A, deixo um conjunto de links que podem ser úteis (clique nas imagens):

1. Pasta na minha drive com um conjunto de mais de cinquenta provas, entre provas modelo e exames nacionais.



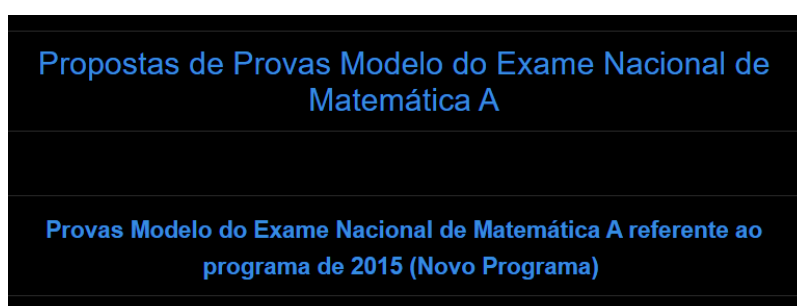
A esmagadora maioria das provas estão resolvidas. Muitas são da minha autoria e as que não são têm a devida identificação dos seus autores. Alguns itens de algumas provas envolvem conteúdos que não serão objecto de avaliação no exame deste ano, pelo que, no nome da prova, identifiquei esses itens.

2. Todos os vídeos das minhas aulas abertas de 2020 e de 2021.



Considero que o que está na pasta e nas aulas é mais do que suficiente para uma boa preparação. No entanto, para quem achar pouco, encontra mais conteúdos nos seguintes sites (clique nas imagens):

1. Recursos para Matemática

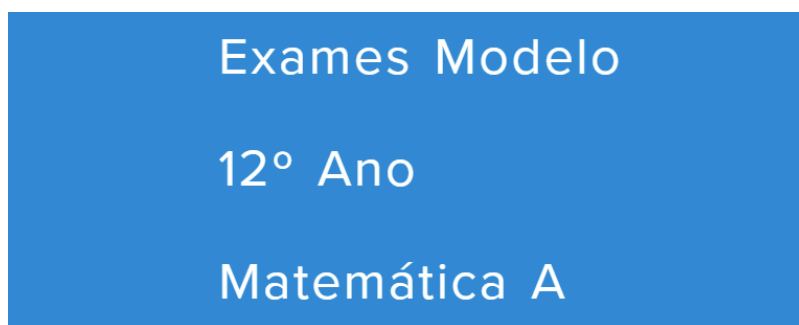


2. MathSuccess (acesso restrito)




The screenshot shows the MathSuccess website for 12th grade. At the top, there is a navigation bar with the MathSuccess logo, the text "MathSuccess", and "12.º". Below this, the main heading is "Exames Modelo". There are two orange buttons: "Inscrever" and "Entrar". Underneath, there are two sections: "Exames Modelo 2021/2022" and "Exames Modelo 2020/2021". Each section contains several blue buttons with text describing the exams, such as "Exame Modelo 12", "Exames Nacionais", "Exame Modelo 9", "Exame Modelo 10", and "Exame Modelo 11".

3. OmegaMat (Francisco Cabral)



The screenshot shows a blue banner with white text that reads "Exames Modelo", "12º Ano", and "Matemática A".

4. Alfaomegamat (acesso restrito, Francisco Cabral)



The screenshot shows the Alfaomegamat website interface. At the top, there is a navigation bar with the logo "α & Ω" and links for "Início", "Apresentação", "Ensino Básico", "Ensino Secundário", "Provas Modelo", and "Contactos". Below the navigation bar, there are four cards representing exam models: "9º ANO PROVAS MODELO DE MATEMÁTICA", "12º ANO PROVAS MODELO DE MATEMÁTICA", "PACK PM 9º + 12º", and "8º ANO PROVAS DE AFERIÇÃO". Each card has a small image and the text "Provas Modelo" above the main title.

5. Sinal + (Nuno Miguel Guerreiro)



HOME APOIA O PROJETO COLETÂNEAS **PROVAS MODELO DE EXAME** TESTES FICHAS DE TRABALHO NEWSLETTER ARQUIVO

Provas Modelo de Exame

Estão disponíveis gratuitamente várias Provas Modelo de Exame Nacional de diferentes anos letivos para te preparares para o Exame Final Nacional de Matemática A. Usufrui delas e partilha com os teus colegas!

6. Matemática? Absolutamente! (resoluções de todos os exercícios de todas as provas do Exame Nacional Matemática A, Paulo Correia)



Eu sei que esta é uma altura de ansiedade e de pressão. É quase inevitável que assim seja. No entanto, nunca se esqueçam que com um trabalho sério, empenhado e contínuo estarão sempre mais perto de alcançarem os vossos objectivos.

Coragem e ambição. Bom trabalho e boa sorte para todos os alunos.

José Carlos Pereira