Sólidos com superfícies curvas

No nosso quotidiano é comum pegarmos em objetos com superfícies curvas utilizando uma mão ou as duas mãos, por exemplo, copos para beber água ou taças para saladas. Para conseguir pegar num copo só com uma mão o copo terá de ter um diâmetro máximo e uma altura mínima na superfície lateral do copo, cujos dedos da mão estão ilustrados na figura 1.

Figura 1

Com os dedos polegar e indicador formamos uma "semicircunferência" cujo diâmetro varia em função da idade e por isso teremos de tomar como referência o valor médio desta variável estatística quantitativa contínua na construção dos copos para crianças, jovens e adultos. O conceito de média aritmética de um conjunto de dados numéricos é trabalhado desde o quinto ano do Ensino Básico.

Para facilmente transportar quatro bolas de ténis são usadas latas cilíndricas cujo diâmetro interno é igual ao diâmetro das bolas e altura é oito vezes o raio das bolas (figura 2). A superfície lateral da lata é curva, mas pode ser construída com um retângulo, enquanto na superfície esférica das bolas de ténis tal não poderá ser feito. Assim, a esfera é um sólido com superfície curva não planificável. Haverá outros sólidos com superfície não planificável?

Figura 2

É vulgar ver rótulos de papel em latas de conserva e para saber a quantidade de papel usada temos de usar a expressão $2\pi \times raio \times altura$. Poderá o rótulo da lata ter igual área à tampa de abertura? Para isso suceder temos de resolver a equação $2\pi \times raio \times altura = \pi \times raio^2$, por exemplo, em ordem à medida do raio obtemos $raio = 2altura$. Assim, para o rótulo ter área igual à soma das áreas das duas bases da lata de conserva, basta a sua altura ser igual ao raio da lata.

Na oferta de uma bola de futebol, ao usar uma folha de papel quadrada temos de saber a medida do lado para cobri-la totalmente. Qual será a medida mínima do lado dessa folha quadrada? Ao unir as duas pontas opostas da folha quadrada, quando estas se tocarem num ponto sobre uma circunferência máxima da bola, então conseguimos cobrir toda a superfície esférica (figura 3). Assim estabelecemos as desigualdades:

Figura 3

$lado \geq \pi\sqrt{2} \times raio$ e $0 < raio \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi} \times lado$. As constantes $\pi\sqrt{2}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}$ são números irracionais transcendentes pois π é número irracional transcendente.

Ao colocarmos uma bola de gelado tangente à superfície lateral de um copo cilíndrico e à sua base circular, temos um espaço vazio a ocupar um terço do volume do copo e o copo cilíndrico diz-se circunscrito à bola de gelado. Assim, três bolas de gelado ocupam o mesmo espaço de dois copos cilíndricos cuja altura é igual ao diâmetro das bolas de gelado.

Um cilindro cujas circunferências das suas bases são tangentes à superfície esférica, diz-se cilindro inscrito na superfície esférica (figura 4). Podem visualizar a construção de um cilindro inscrito numa superfície esférica em https://www.geogebra.org/classic/z26aeezw.

Um problema interessante é descobrir as medidas do raio e da altura do cilindro inscrito numa superfície esférica com maior volume.

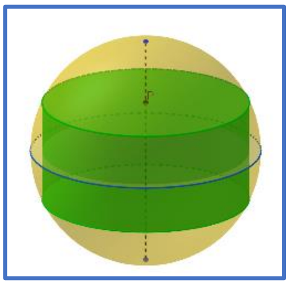

Figura 4

O volume desse cilindro inscrito é dado pela expressão $v(r)=2\pi\sqrt{r^4\left(R^2-r^2\right)}$ na qual R é a medida do raio da superfície esférica e r é a medida do raio das bases do cilindro cujo gráfico está representado em https://www.desmos.com/calculator/igomhyqtik?lang=pt-BR. A função v tem o nome de função irracional quadrática estudada no 11º ano do Ensino Secundário em Matemática A.

O telhado dos moinhos de vento tem a forma de um cone onde está abrigado o suporte das velas (figura 5). A superfície lateral do cone pode ser planificável com um círculo com sobreposição ou corte de um sector circular. Os chapéus cónicos asiáticos servem como proteção da chuva e do sol pois encaixam facilmente sobre a cabeça das pessoas (ver mais informação em https://stringfixer.com/pt/Conical_Asian_hat).

Figura 5

Uma tarefa interessante de sala de aula para trabalhar com alunos do terceiro ciclo será descobrir as dimensões de um chapéu cónico para cobrir a cabeça "média" da turma. Podem ver em https://www.geogebra.org/m/gpujqnwt a construção da superfície curva do cone.

Na figura 6 estão ilustrados um candeeiro cuja superfície curva é a parte lateral de um tronco de cone e na base da mesa está um copo cónico cujo líquido representa um cone. O volume de líquido é por certo mais de 50% do espaço do copo, mas a superfície plana circular do líquido não tem metade do raio do topo do copo. Qual será a altura do líquido para este encher metade de um copo cónico? Deixo ao leitor a resolução desta curiosa questão.

Figura 6

Na venda de gelados é utilizada uma colher com a forma da superfície de uma semiesfera para colocar o número de bolas num cone de bolacha de acordo com o pedido do cliente. Quanto mais bolas de gelado pedidas maior tem de ser o cone de bolacha e para isso são utilizados os cones escandinavos. Precisamos de círculos de bolacha para produzir cones escandinavos. Colocamos o vértice de um cone de plástico na fronteira da bolacha, enrolando-a à volta do cone obtemos o formato cónico (figura 7).

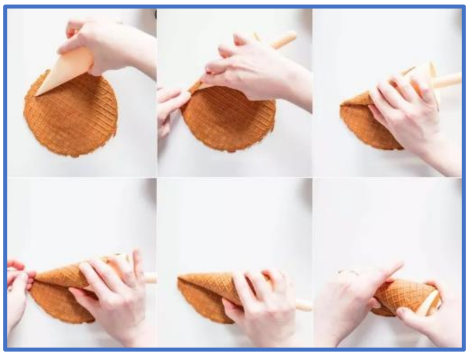

Figura 7

Desde criança observamos o movimento de objetos com superfícies curvas, por exemplo, as rodas de um carrinho. A forma da superfície curva dos objetos vai determinar como se comportam sobre uma superfície plana. Se dermos um pequeno toque numa bola esta poderá realizar qualquer movimento sobre um plano. Mas isto já não sucede com um cilindro ou cone. Podem visualizar o comportamento destes três sólidos "redondos" sobre uma mesa em https://youtu.be/0NAAOzHgRe8.

Uma curiosa aplicação de superfícies curvas é obter um dado com apenas dois resultados no seu lançamento. Basta cortar ao meio um cilindro cuja altura é igual ao diâmetro das suas bases e unir as duas metades pela face quadrada (figura 8). Podem ver a construção do sólido com duas superfícies em https://www.geogebra.org/classic/vwxkumpu. Saudações Matemáticas.

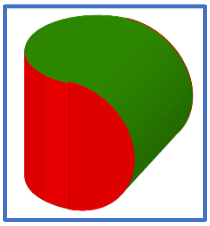

Figura 8