Contas de adição Resolução

Problema 1:

Serás capaz de dar um exemplo de duas contas destas com resultados distintos e em que ambas as provas deem certo?

Nas provas dos 9 e dos 11, quando aplicamos os "noves e onzes fora" ao resultado obtemos o resto da divisão desse resultado por 9 e por 11, respetivamente.

Se os dois resultados dão o mesmo resto, tanto divididos por 9 como por 11, então a sua diferença é um múltiplo de 9 e de 11 logo de 99.

Basta, por isso, que os dois resultados difiram um múltiplo de 99 do resultado certo.

Por exemplo:

Conta do João	***Conta da Maria***
1 2 3	*1 2 3*
4 5 6	*4 5 6*
3 8 1	*6 7 8*

Problema 2:

Dados os algarismos *a b c d e f* consegues determinar o número de resultados com as quais a prova dos nove dá certa?

Suponhamos que o resultado certo é um múltiplo de 9 mais r, com $0 \leq r \leq 8$.

Em cada nove números naturais consecutivos há um e um só múltiplo de nove mais r.

Ora há exatamente 900 números com três algarismos, ou seja, 100 conjuntos disjuntos de nove números consecutivos. Logo há 100 múltiplos de 9 mais r, números com os quais, e para a prova dos nove, a "prova dá certa".

E o número de resultados para os quais a prova dos onze dá certa?

Suponhamos que o resultado certo é um múltiplo de 11 mais r, com $0 \leq r \leq 10$

Em cada onze números naturais consecutivos há um e um só múltiplo de onze mais r.

Já vimos que há 900 números com três algarismos. Repare que $900 = 81 \times 11 + 9$*, isto é, pode formar 81 conjuntos disjuntos de onze números consecutivos com três algarismos e ainda sobram 9.*

Começando em 100, ao formar esses 81 conjuntos o último número a escolher é 990 que é múltiplo de 11.

Então, se o resultado certo for um múltiplo de 11 mais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 ainda há mais um número, além dos que pertencem aos 81 conjuntos formados, para os quais a "prova dá certa", ou seja, no total 82 números.

Nos outros casos, $r = 0$ *ou* $r = 10$*, o número é de apenas 81.*

E o número de resultados para os quais ambas as provas dão certo?

Se ambas as provas dão certo ambos os resultados têm o mesmo resto quando divididos por 99.

Por um raciocínio análogo aos anteriores pode concluir que, se o resultado certo for um múltiplo de 99 mais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, há no total 10 números para as quais as provas dão certo.

Nos outros casos o número é de apenas 9.

Problema 3:

Terá o Frederico razão? Se sim és capaz de descobrir porquê?

Claro que tem razão!

Se as três provas dão certo os dois resultados dão o mesmo resto para as divisões por 9, 11 e 13.

Então a diferença é um múltiplo dos três números logo um múltiplo de 9 x 11 x 13 = 1287.

Não há dois números de três algarismos com esta diferença!

Problema 4:

Se os "onze fora" e os "treze fora" deram zero e os "nove fora" deram três qual o resultado certo da adição?

Se os "onze fora" e os "treze fora" deram zero o resultado é um múltiplo de 11 e de 13 logo de 143.

E como tem três algarismos sabemos que só há um número nas condições dadas pois a prova dos nove também deu "conta certa".

Ora $143 = \dot{9} + 8$.

Ao multiplicar 143 por um inteiro k, os "noves fora" do resultado são os de k x 8.

O menor k positivo tal que k x 8 "noves fora" é três é 6 pois 6 x 8 = 48 "noves fora" três.

Logo o número é 6 x 143 = 858.