2018 Maio

Problema 1 Estimulação matemática

A Aritmética é a Rainha das Matemáticas

Resolução

Esta foi a conversa que ouvi, entre a Júlia e o Pedro, enquanto, a tomar um café numa mesa ao lado, ia lendo as recentes notícias sobre as perspetivas de sucesso da seleção nacional.

Júlia:

Deixa-me começar por te recordar que dizer que A e B são primos relativos significa que, se os escreveres como produto de fatores primos, não encontras fatores primos comuns.

Assim: 3x5 e 7x11 são primos relativos, mas nenhum deles é primo nem primo relativo com 3x7.

Agora repara que se dois inteiros *I* e *J* estão nas condições que me deste, isto é, $I - a = \dot{A}$ e $I - b = \dot{B}$ e $J - a = \dot{A}$ e $J - b = \dot{B}$ …

Pedro:

O que é isso do ponto em cima do A e do B?

Júlia:

Usa-se para indicar um múltiplo inteiro.

Mas continuando, então *I* - *J* é múltiplo de A e B, basta subtraíres a terceira igualdade da primeira e a quarta da segunda, logo é múltiplo de AB pois são primos relativos. Podes tentar provar isto, é divertido! E, já agora, ver com um exemplo muito simples que se A e B não forem primos relativos um múltiplo dos dois pode não ser múltiplo do produto…

Ora, como este é superior a 115 e a idade de todos os habitantes do nosso país está entre 0 e 115, a ser possível encontrar uma solução ela será única.

Pedro:

Bem visto…

Júlia:

Agora repara que se *I* verifica as condições que puseste então todos os números da forma *I* + $\dot{AB}$ também verificam.

Olha só: $(I + \dot{AB}) - a = (I - a) + \dot{AB}$= $\dot{A} + \dot{AB} = \dot{A}$

e $(I + \dot{AB}) - b = (I - b) + \dot{AB}$ = $\dot{B} + \dot{AB} = \dot{B}$

E obviamente não há outras soluções uma vez que quaisquer duas devem diferir de um múltiplo de AB.

Pedro:

Mas quem te garante que há um inteiro que difere de a de um múltiplo de A e de b de um múltiplo de B?

Júlia:

Foi o que eu fui descobrir a seguir, fui à procura de um.

Nota que os *I's* que verificam a primeira condição são: $I = a + xA$ com x inteiro.

Trata-se descobrir se algum destes verifica a segunda.

Ora: $a + xA = b + \dot{B}$ é equivalente a $xA = b - a + \dot{B}$ que por sua vez é equivalente a $xA = r + \dot{B}$ onde *r* é qualquer inteiro que difira de *b*-*a* de um múltiplo de B.

Repara que posso escolher *r* entre 0 e B -1.

Agora nota que se atribuir a x os valores 0, 1, 2, …, B-1 obtenho sempre valores diferentes para r.

Se fosse:

$xA = r + \dot{B}$ e $x'A = r + \dot{B}$ então $(x - x')A = \dot{B}$

e como A e B são primos relativos $x - x'$ teria de um múltiplo de B!

Pedro:

Então basta-te escolher o único x que multiplicado por A dá resto r quando dividido por B.

Júlia:

Nem mais, e individualizando um tal x com a designação de x_0, o conjunto dos pontos que verificam as duas condições seria: $S = \{a + x_0 A + \dot{A}B\}$.

Agora para saber a idade só teria de escolher o múltiplo da AB que dá origem a um número entre 0 e 115.

Pedro:

Então deixa lá ver se consigo descobrir quantos anos viveu Gauss.

Calculo $b - a$: 5 - 12 = -7 logo $r = 2$

Vejo qual dos produtos $13x$, para $x = 0, \dots, 8$, dá resto 2 quando dividido por 9 quando dou a x os valores 0, 1, 2,…

Vou construir esta tabela:

x	Resto
0	0
1	4
2	8
3	3
4	6
5	2

Cá está: $x_0 = 5$ e o número de anos

$$N = 12 + 13 \times 5 + y \times 13 \times 9$$

Claro que $y = 0$ e $N =$ 77

Júlia:

Certo, percebeste perfeitamente…

Desafio final

Queres tentar provar que se A e B não são primos relativos é possível escolher a e b de forma a que nenhum inteiro difira de a um múltiplo de A e de b um múltiplo de B ?

... e identificar esses pares (a, b) de inteiros?