2018 janeiro

Problema 1: Resolução

Os presentes dos Reis Magos

Ora aqui está, um problema muito simples que vamos aproveitar para dar uma ideia, dirigida à malta jovem, de como pode ser profícua a ligação entre ramos diferentes da Matemática: neste caso entre a Álgebra e a Geometria.

Vamos então designar por x, y e z as quantidades incógnitas[1], ou seja, e respetivamente, o número de caixas de cada um dos tipos das mais baratas para as mais caras.

Como os Reis traziam um total de dezasseis caixas podemos escrever esta igualdade:

$$x + y + z = 16$$

Dez das mais baratas custaram 40 áureos portanto 4 áureos foi o preço de cada uma.

Com estes 40 áureos podem comprar-se 4 das de preço intermédio, logo cada uma custou 10 áureos, ou duas das mais caras, portanto a 20 áureos cada uma.

Sabemos que a totalidade das caixas valia 120 áureos; podemos traduzir este facto pela igualdade:

$$4x + 10y + 20z = 120$$

Temos então um sistema de duas equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 4x + 10y + 20z = 120 \end{cases}$$

Surgem-nos agora as questões seguintes:

Existirá um terno (x, y, z) de inteiros positivos que satisfaça o sistema?

Se a resposta for negativa o problema foi mal posto: os dados fornecidos não traduzem o que se passou, de facto, com os nossos longínquos viajantes.

E se existir, será único? Se não for temos dados insuficientes para descobrir o que os Reis de facto traziam.

---

[1] Desconhecidas

Vamos, então, tentar encontrar resposta para estas perguntas.

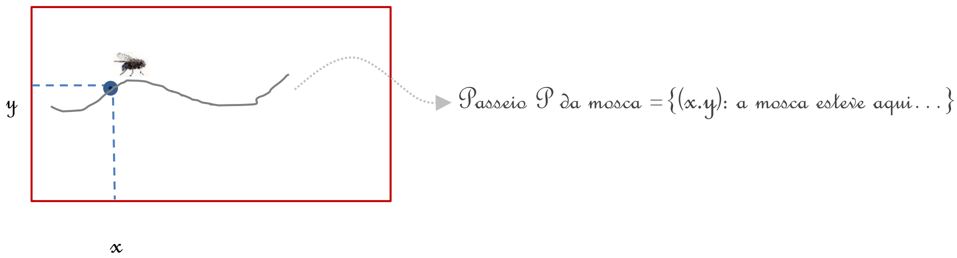
Se atribuirmos a z um valor qualquer fixo, z_0 por exemplo, ficamos com o sistema seguinte:

$$\begin{cases} x + y = 16 - z_0 \\ 4x + 10y = 120 - 20z_0 \end{cases}$$

E é aqui que entra a ligação à geometria.

A génese desta ligação começou, segundo consta, num colégio de padres jesuítas onde estudava um jovem que, por causa da sua saúde débil, tinha permissão de ficar deitado até às 11 horas.

Consta que uma manhã, estirado na cama e a olhar para o teto, viu uma mosca aí pousada. Foi então que teve esta brilhante ideia que veio revolucionar a Matemática a partir daí: reparou que, para definir a sua posição, só precisava de dois números: a distância do inseto a dois dos lados do teto com um ponto comum.



Então, um ponto passava a ser um par de números e um passeio da mosca uma coleção de pares de números. Podíamos tratar problemas algébricos geometricamente e problemas geométricos algebricamente.

O génio de que estamos a falar é, nem mais nem menos, do que René Descartes[2].

E é com estas ideias que vamos tentar descortinar se o último sistema tem solução para alguns valores de z_0.

Ora tu já sabes que se a coleção de pontos que descreve o passeio da mosca é constituída por pontos que satisfazem uma igualdade da forma:

$$ax + by = c$$

então ela andou sobre uma reta.

E mais, quando x é incrementado de uma unidade y vem incrementado de $-\frac{a}{b}$ se b não for nulo[3].

Este número traduz a inclinação da reta e chama-se o seu declive.

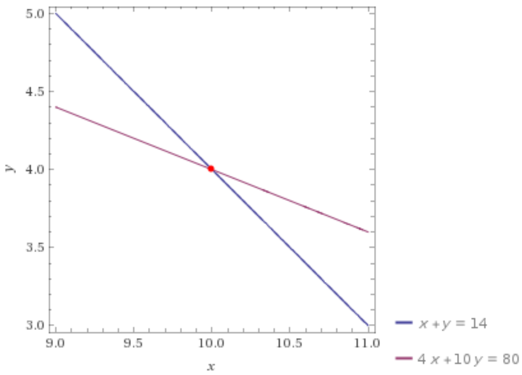
---

[2] Se quiser saber como um grande génio como Descartes se pode enganar em pontos fundamentais e ser mesmo maldoso para colegas pode gostar de ver uma mini biografia de Pascal editada no Clube e que pode ler aqui.

[3] Podes verificar, na figura abaixo, o que passa com a ordenada das duas retas quando a abcissa passa de 10 para 11.

Ora qualquer que seja z_0 as duas retas têm declives diferentes (-1 a primeira e $-\frac{2}{5}$ a segunda) e, por isso, intersectam-se num único ponto, isto é, o sistema tem uma, e uma só, solução para cada z_0.

Para $z_0 = 2$:



Agora repara que os únicos valores inteiros que z_0 pode tomar são os inteiros de 1 a 14[4].

E voltamos ao tratamento algébrico. Não é difícil reconhecer que se substituímos a segunda equação pela sua soma com a primeira multiplicada por -4 a solução do sistema não se altera (tenta descobrir porquê).

Isso conduz-nos ao sistema equivalente[5]:

$$\begin{cases} x + y = 16 - z_0 \\ 6y = 56 - 16z_0 \end{cases}$$

Vamos então procurar soluções constituídas por inteiros positivos atribuindo valores a z_0:

$z_0 = 1 \;\longrightarrow y = \frac{50}{6}$ .... Solução não inteira

$z_0 = 2 \;\longrightarrow y = 4, x = 10$

$z_0 = 3 \;\longrightarrow y = \frac{4}{3}$ .... Solução não inteira

E é só pois, a partir daqui, só obtínhamos valores negativos para y!

Conclusão:

Os Reis traziam 10 caixas das mais baratas, 4 das de preço intermédio e 2 das mais caras.

---

[4] Consegues saber porquê?

[5] Equivalente significa que tem a mesma solução...