2020 Junho

Problema 1: Resolução

Pois o nosso Professor, depois de ver os seus alunos “em linha”, resolveu pô-los a pensar:

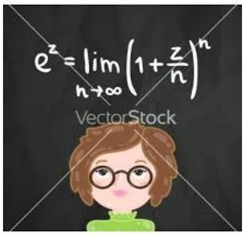
- Qual de vocês é capaz de mostrar que a observância desta regra conduz sempre a uma linha recta de alunos? desafiou ele a turma.

E obteve três respostas!

Primeiro falou a Carolina, rápida a pensar, mas com poucas preocupações em colocar solidez nos raciocínios.

Carolina:

- Oh Professor! é fácil. A turma tem 15 alunos. Alinha três para começar. Pega num quarto e num desses três. Existe outro no seu alinhamento, portanto na linha que passa por dois dos três iniciais ... logo por todos. Pega num quinto e noutro dos quatros iniciais…repete o processo… Quando chegar ao décimo quinto estão todos alinhados!



Sílvia, indignada:

- Isso não tem generalidade! Temos de arranjar forma de garantir que o alinhamento acontece em turmas com um número arbitrário N de alunos. E isso consigo eu aplicando o **Princípio de Indução**[1].

Vejam:

Base de indução: N = 3

Quaisquer dois desses três alunos admite um terceiro, o outro neste caso, no seu alinhamento.

Hipótese de Indução: - Consegue-se o alinhamento numa turma A com N alunos.

Tese: - Também se consegue o alinhamento numa turma T com N+1 alunos.

- E a **Prova**:

Considero uma sub turma A com N alunos da turma T com N+1 alunos.

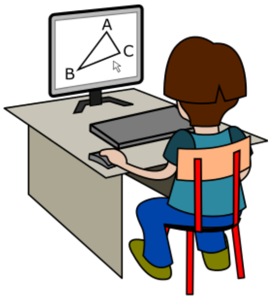
A turma A fica alinhada por hipótese de indução. Para um aluno de A e o outro que não é de A existe um terceiro, de A claro, no seu alinhamento. Essa linha contém dois elementos de A logo é a recta onde estão todos os alunos de A.

Claro que o outro também lá está: os alunos de T estão alinhados!

---

[1] Pode ver mais sobre o **Princípio de Indução** no nosso artigo da rubrica Integrando de Setembro de 2012 em: https://clube.spm.pt/news/1454

Até que por fim falou o geómetra da companhia:



Eduardo, o Geómetra da turma:

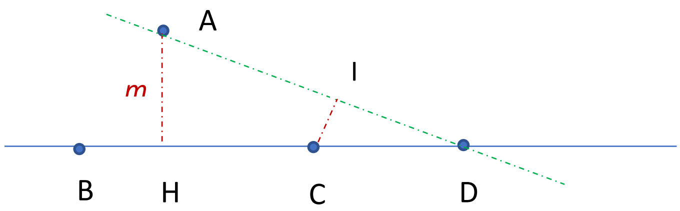
- Eu provo isso recorrendo à **Redução ao Absurdo**[2].

Suponham que no fim do processo ficam três alunos não alinhados.

Então o conjunto dos números que representam as distâncias de um qualquer deles à linha definida por outros dois não alinhados com ele é não vazio.

Como é finito[3] tem um mínimo, positivo pois todos os números são positivos. Chamo-lhe *m*: distância de um aluno A à linha recta definida por alunos B e C.

Vejam a figura, onde H é a projeção ortogonal de A sobre a recta referida.



Ora existe um aluno D sobre a linha que une B e C. Dois dos alunos B, C e D estão do mesmo lado de H, suponhamos do lado direito.

A distância de C à linha recta que passa pelos alunos A e D é inferior a *m – querem provar isso? (!)*- contra o que admitimos!

O Professor Silva dispensou-os do alinhamento…

[2] Pode ver mais sobre o **Método de Redução ao Absurdo** no nosso artigo de Julho de 2018 aqui: https://clube.spm.pt/news/resoluo-do-problema-2-por-jos-veiga-de-faria-no-existe-um-x-tal-que

[3] Sendo N o número de elementos da turma, o número de elementos desse conjunto é inferior a $N \times \binom{N-1}{2}$: para cada aluno o número de rectas definidas por colegas que não o contêm é inferior (*porquê inferior?...*) ao número de pares, não ordenados, de colegas.