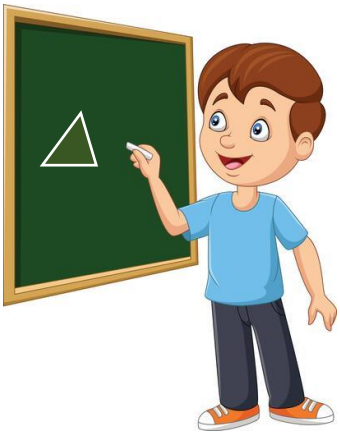
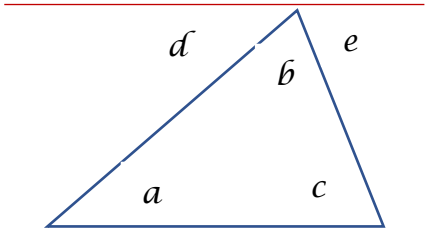
2022 Janeiro

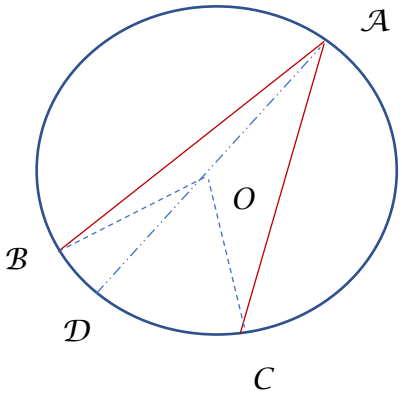
Problema 8 **O Leonardo apresenta a sua Resolução …**

Esta manhã a Professora Manuela convidou os Professores Antunes e Ernesto para participarem numa aula extra onde o Leonardo vai apresentar as provas que tinha conseguido.



O Leonardo aproximou-se do quadro, concentrou-se, e desenhou, com todo o cuidado, estas duas figuras:





Leonardo (*depois de desenhar as figuras*): -

Em relação à primeira figura, onde a reta a vermelho é paralela à base do triângulo, os ângulos a e d e c e e são iguais, logo a soma dos ângulos a, b e c é um ângulo raso. Penso que foi isto que o jovem Blaise notou.

Em relação à segunda figura, onde O é o centro da circunferência:

- Os triângulos OAB e OAC são isósceles sendo $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$ e $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$

- Atendendo a que a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso, como acabamos de ver, é $\sphericalangle BOD = 2 \times \sphericalangle BAD$ e $\sphericalangle COD = 2 \times \sphericalangle CAD$

- Então: $\sphericalangle BOC = 2 \times \sphericalangle BAC$

E concluímos que se um ângulo, com vértice num ponto A de uma circunferência, subentende um arco BDC a sua medida é metade da medida do ângulo ao centro que subentende o mesmo arco.

Se B e C são extremos de um diâmetro o arco subentendido é uma semicircunferência e o ângulo $\sphericalangle BAC$ é, portanto, reto!

Professora Manuela: - Excelente Leonardo, muito bem, conseguiste mesmo acrescentar generalidade ao resultado. Vamos então agora pedir ao Ernesto que nos fale um pouco sobre o célebre **Teorema** atribuído a **Euclides de Alexandria** relativo à quantidade de primos.

Professor Ernesto (*entusiasmado por ter a oportunidade de falar com a turma sobre um tema que tanto o fascina*): - Antes de falar do Teorema queria dizer-vos que Euclides, na demonstração que faz, usa um método de prova que gostava de usar e que tem o nome de **Redução ao Absurdo** e que **G. H. Hardy** refere como uma das mais finas armas de um matemático.

Vou-vos explicar como funciona:

Vocês querem provar que uma proposição P é verdadeira. Supõem que P não é verdadeira, ou seja, acrescentam, provisoriamente, $\sim P$ aos axiomas; e fazem-no com a esperança de que isso vos "conduza a um absurdo". Ligam o motor lógico dedutivo e, recorrendo a $\sim P$ e outras proposições verdadeiras, deduzem uma proposição Q que sabem ser falsa.

Então Q e ~Q são verdadeiras e falsas pois resultam dos axiomas. E isso resultou de suporem que P é falsa! Logo resta-vos abandonar esta suposição inicial que foi a causa da contradição: P é, afinal, verdadeira!

Sabem que numa teoria axiomática, se uma proposição fosse verdadeira e falsa todas o seriam e a teoria valeria zero. Podem ver uma prova, que é muito simples, deste extraordinário resultado na conversa que tive aqui com o Professor Antunes há tempos no nosso Café habitual (*ver aqui*).

O grande matemático **Paul Erdös** comparou o Método de Redução ao Absurdo ao gambito num jogo (o xadrez por exemplo). Um gambito consiste em ceder posições (sacrificar uma peça por exemplo) para obter de seguida uma vantagem significativa, como ganhar o jogo. Pois bem, na redução ao absurdo cedemos o jogo todo (admitimos como falsa a proposição que queremos provar como verdadeira) para de seguida ganharmos a partida (afinal a proposição é verdadeira).

E agora vamos então à célebre demonstração …

OS ELEMENTOS **PROPOSIÇÂO 20**

Há mais primos do que qualquer quantidade fixa de números primos ou, em termos mais atuais,

Qualquer que seja o conjunto finito de números primos existe um conjunto de primos "mais vasto" do que esse: que o contém estritamente.

Sejam os primos desse conjunto de A, B, C, ...

E seja M o menor múltiplo comum desses números; e façamos P = M +1.

P, sendo superior a M, não pertence ao conjunto.

Agora: P é primo ou não é primo.

Se P é primo o conjunto A, B, C, …, P é um conjunto de primos "mais vasto" do que o inicial.

Se P não é primo, e não sendo 1, é divisível por um primo: seja G.

Suponhamos que G é um dos elementos do conjunto: então divide M. Como divide P dividiria 1.

Ora isto é absurdo.

Então G é um primo que não pertence ao conjunto dado, logo o conjunto A, B, C, … , G é um conjunto de primos "mais vasto" do que o inicial.

Q. E. D.

Professor Antunes: - Oh! Ernesto, ele podia ter apresentado a prova evitando a redução ao absurdo.

Professor Ernesto: - Tens razão, facilmente, mas ele era grande adepto deste método de prova. Pode ser um desafio para o Leonardo reescrever a demonstração nesse sentido.

Professor Antunes: - Por falar em demonstrações alternativas, estou a lembrar-me de uma completamente diferente conseguida dois mil anos mais tarde por outro gigante, **Leonhard Euler**, cuja beleza não fica atrás da desta. Tenho uma turma do 12.º onde há gente muito interessada em Matemática. Será que queres ir lá apresentá-la? E convidamos o Leonardo, para ouvir a prova do seu homónimo!

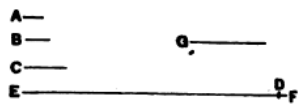
Professor Ernesto: - Com todo o gosto, num dos próximos Problemas ou deltaKappa's.

Professora Manuela: - Pois eu trouxe-vos o Teorema tal como consta no texto original de Euclides, traduzido para inglês é claro.

PROPOSITION 20.

Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.

Let A, B, C be the assigned prime numbers;
I say that there are more prime numbers than A, B, C.



For let the least number measured by A, B, C be taken,
and let it be DE;
let the unit DF be added to DE.

Then EF is either prime or not.
First, let it be prime;
then the prime numbers A, B, C, EF have been found which are more than A, B, C.

Next, let EF not be prime;
therefore it is measured by some prime number. [VII. 31]

Let it be measured by the prime number G.
I say that G is not the same with any of the numbers A, B, C.
For, if possible, let it be so.
Now A, B, C measure DE;
therefore G also will measure DE.

But it also measures EF.
Therefore G, being a number, will measure the remainder, the unit DF:
which is absurd.

Therefore G is not the same with any one of the numbers A, B, C.
And by hypothesis it is prime.
Therefore the prime numbers A, B, C, G have been found which are more than the assigned multitude of A, B, C.

Q. E. D.

Reparem que os números são representados por segmentos, como era normal nas Academias da Grécia Antiga. Consta que na entrada da sua **Academia**, **Platão** terá escrito a célebre frase: "***Que ninguém entre aqui que não saiba Geometria***".

Como podem ver, Euclides usou entidades geométricas na elaboração de Os Elementos: para dizer que o número $\mathcal{A}$ divide $\mathcal{B}$ diz que o segmento $\mathcal{A}$ mede o segmento $\mathcal{B}$, no sentido de que $\mathcal{B}$ se pode obter justapondo $\mathcal{A}$ um número finito de vezes. E refere o menor múltiplo comum de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, C, \ldots$ como o menor número/segmento que é medido por todos eles.

Leonardo, deixo-te o desafio de mergulhar no livro e descobrir como é que ele definia número primo.