## 2022 Março

## Problema 11 Resolução

Esta é a prova conseguida pelo jovem **Theaetetus**, no seu trabalho com **Sócrates**, de acordo com o relato de **Shafarevitch**[1]. Fizemos algumas alterações, mantendo a essência do raciocínio e o rigor, para a tornar mais sucinta.

**Notas iniciais:**

*i)* *Um número real positivo $x$ é chamado de racional se, e só se, se puder escrever $x = \frac{m}{n}$ onde $m$ e $n$ são naturais;*

*ii)* *Se um natural é um quadrado perfeito aparece, na sua decomposição em factores primos, como produto de primos cada um deles elevado a um expoente par:*

$$N^2 = {p_1}^{2n_1} \times \ldots \times {p_k}^{2n_k}$$

*Assim se o primo $p$ divide $N^2$ então $p$ divide $N$ e $p^2$ divide $N^2$.*

**Teorema**: $\sqrt{2}$ é irracional.

**Prova**:

Se $\sqrt{2}$ fosse racional podia escrever-se $\sqrt{2} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ com $\mathrm{m}$ e $\mathrm{n}$ naturais sem divisores comuns, como fração irredutível.

Então $\mathrm{m}^2 = 2\mathrm{n}^2$ e 2 dividiria $\mathrm{m}^2$ logo $2^2$ dividiria $\mathrm{m}^2$ logo 2 dividiria $\mathrm{n}^2$ e, portanto, dividiria $\mathrm{n}$.

E $\mathrm{m}$ e $\mathrm{n}$ teriam um divisor comum!

Caro leitor/a, reconhecerá, de imediato, que o teorema e a prova manteriam a validade se substituíssemos 2 por um qualquer primo $p$, pelo que fica provado o

**Teorema:** Se $p$ é primo $\sqrt{p}$ é irracional

Agora vejamos o caso geral:

**Teorema**: *Se $c$ é natural e não é um quadrado perfeito $\sqrt{c}$ é irracional.*

Considerando o resultado provado para todos os valores pequenos de $c$ vamos ver como Theaetetus se move de um inteiro para outro imediatamente superior.

Começamos por notar que se a proposição é verdadeira para todos os naturais inferiores a $c$ então podemos escrever $c = pf$ , com $p$ primo e $f$ natural inferior a $c$.

Admitindo que $\sqrt{c}$ é racional seria $c = \frac{m^2}{n^2}$ ou $m^2 = cn^2 = pfn^2$ com $m$ e $n$ sem divisores comuns.

[1] No livro **Basic Notions of Algebra** - Editora Springer

Assim $p$ dividiria $m^2$, logo dividiria $m$, e $p^2$ dividiria $m^2$.

Então:

Se $p$ não divide $f$ divide $n^2$ logo divide $n$ e $m$ e $n$ teriam um divisor comum.

Se $p$ divide $f$ então $m^2 = p^2 g n^2$, onde $g < f < c$, e

ou

i) $g$ é um quadrado perfeito e $c = p^2 g$ seria um quadrado perfeito

ou

ii) Como $g$ é inferior a $c$, $\sqrt{g}$ seria irracional (*cá está, aqui **Theaetetus** usa a **Hipótese de Indução**…*) logo $c$ seria irracional pois, se $\sqrt{c} = \frac{m}{n}$, então:

$$\sqrt{g} = \frac{m}{np}$$ portanto racional!