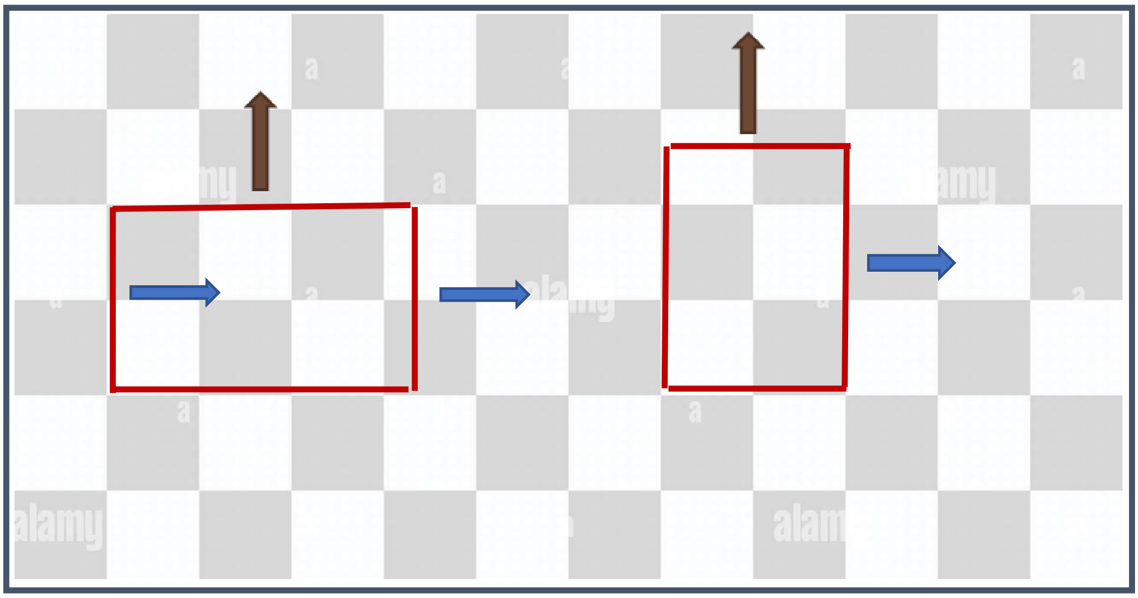
2022 Abril

Problema 12 **Resoluções**

Resolução 1: Por processos elementares[1]

Suponha que inserimos no retângulo $\mathcal{R}$ uma quadrícula cuja medida do lado é ½ da unidade usada para medir os lados de $\mathcal{R}$ e dos retângulos que o dividem: como indicado na figura onde o retângulo $\mathcal{R}$ é de 6 X 3.

Se agora imaginarmos um retângulo cuja medida dos lados verticais é inteira, e o colocarmos na posição indicada à esquerda na figura, apercebe-se de imediato, e uma vez que o número de linhas do quadriculado dentro desse retângulo é par, que as áreas cobertas a branco e escuro são iguais.



Se agora deslocar este retângulo horizontalmente, como indicado pelas setas azuis, repara, se se fixar no lado esquerdo do retângulo, que, nesse deslocamento, a área a branco que vai perdendo é igual à área a escuro que se perde; e, se se fixar no lado direito, vê, de imediato, que as áreas a branco e a escuro que ganha são iguais.

Ou seja, uma translação horizontal preserva a igualdade das áreas a branco e escuro.

E o mesmo se passa com as translações verticais: seta a castanho.

Como qualquer translação se pode obter como uma "sequência" destas duas, concluímos que, em qualquer retângulo cuja medida dos lados verticais seja dada por um inteiro, as áreas a branco e a escuro são iguais.

E o leitor/a facilmente concluirá, seguindo um raciocínio análogo, ou rodando o retângulo de 90 graus para cair no caso anterior, que o mesmo se passa se os lados cuja medida é inteira forem os horizontais: retângulo da direita na figura.

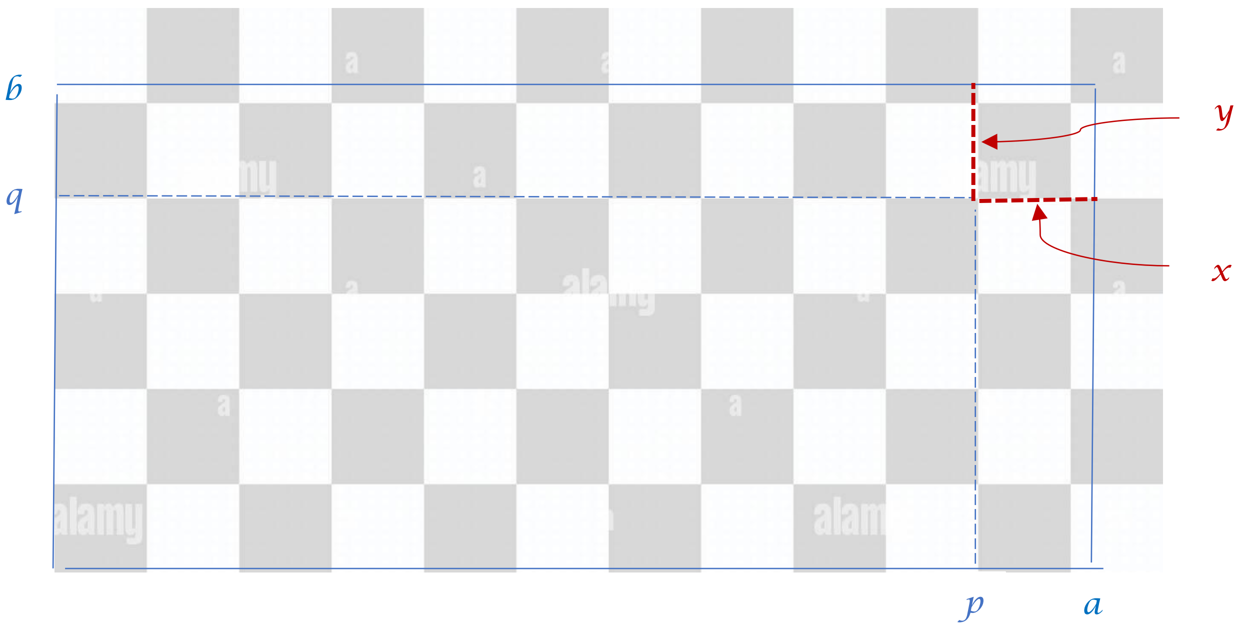
---

[1] **Richard Feynman** definia, na sua célebre **Lição Esquecida**, uma lição de génio sobre a dedução das Leis de Kepler, uma resolução elementar como uma na qual a maximização da inteligência empregue permitia minimizar os conhecimentos teóricos implicados. Bom, de facto, era mais radical ainda nos termos usados…

Como $\mathcal{R}$, está dividido em retângulos com pelos menos dois lados paralelos com medida inteira, e, portanto, com as áreas a branco e a escuro iguais, também em $\mathcal{R}$ as áreas a branco e a escuro são iguais.

Admita agora, por absurdo, que as medidas *a* e *b* dos lados de $\mathcal{R}$ não são inteiras.

Então, sendo $p = int(a)$ e $q = int(b)$ (*veja a figura abaixo*), se retirarmos o pequeno retângulo de lados $x = a - p$ e $y = b - q$ (*canto superior direito*) na região que resta a área a branco é igual à área a escuro: é a reunião de três retângulos nos quais a medida de um dos lados é inteira.



Então, neste retângulo do canto superior direito, as áreas a branco e escuro devem ser iguais.

Ora, isto é impossível se $x \leq \frac{1}{2}$ ou $y \leq \frac{1}{2}$ como facilmente reconhecerá.

Resta o caso em que ambos são maiores do que ½.

Neste caso a área a escuro será $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ e a área a branco será $\frac{1}{2}(\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right))$.

Igualando as expressões obtém $x + y - xy = 1$ que é a equação de uma hipérbole … degenerada: a solução é constituída pelos pontos de abcissa 1 e pelos pontos de ordenada 1, como pode facilmente reconhecer se escrever a equação na forma $(x - 1)(y - 1) = 0$.

Mas, por hipótese, $0 < x, y < 1$ c. q. d.

Resolução 2: Recorrendo a artilharia mais pesada

Passemos agora ao oposto, vamos ser preguiçosos, vamos aproveitar o trabalho de outros.

Como muitas vezes sucede em Matemática, podemos poupar trabalho lógico dedutivo, energia mental, se recorrermos a resultados já estabelecidos por gigantes da disciplina.

O equivalente a, querendo distribuir água à cidade de Lisboa, recorrer ao Princípio dos Vasos Comunicantes para poupar o esforço hercúleo necessário à construção de um Aqueduto como o das Águas Livres.

Ora veja, considere um retângulo $I = [a, b] \times [c, d]$ no plano $\mathbb{R}^2$.

Pelo **Teorema de <u>Fubini</u>**, é:

$$\int_I e^{2\pi i(x+y)} dxdy = \int_a^b e^{2\pi ix}\, dx \times \int_c^d e^{2\pi iy} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(e^{2\pi ib} - e^{2\pi ia}\right) \times \frac{1}{2\pi i}\left(e^{2\pi id} - e^{2\pi ic}\right)$$

O integral é nulo se e só se $e^{2\pi ia} = e^{2\pi ib}$ ou $e^{2\pi ic} = e^{2\pi id}$ o que acontece se e só se *b-a* é inteiro ou *d-c* é inteiro, ou seja, se e só se a medida de um dos lados do retângulo é inteira[2].

Então, o integral de $e^{2\pi i(x+y)}$, sobre todos os retângulos em que dividimos $\mathcal{R}$, é nulo, logo é nulo sobre $\mathcal{R}$.

Mas então a medida de um dos lados de $\mathcal{R}$ é inteira c. q. d.

---

[2] $e^{i\theta}$ representa um complexo de módulo 1 e argumento θ; assim, se substituirmos θ por dois valores reais, obtemos o mesmo complexo se e só se eles diferirem de um múltiplo inteiro de 2π.