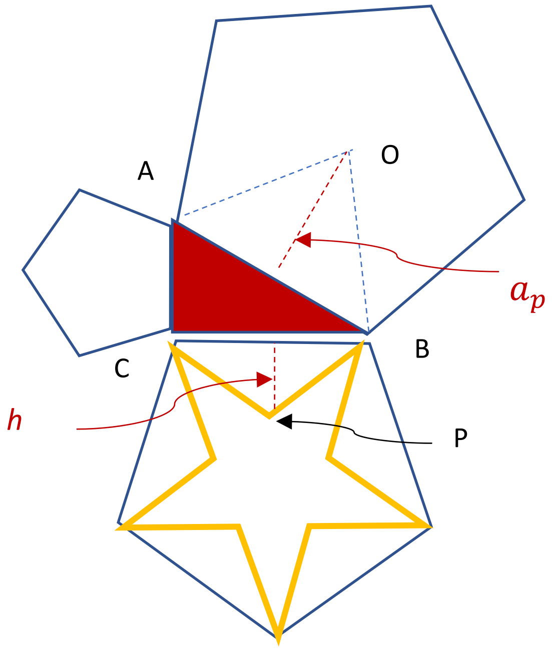
2022 Junho   Problema 14

Desafio 3   Resolução



Na figura acima o triângulo a vermelho é retângulo de catetos a e b e hipotenusa c e os pentágonos Pa, Pb e Pc são regulares de lados com as medidas, respetivamente, de a, b e c.

Consegues provar que a soma dos quadrados dos perímetros de *Pa* e *Pb* é igual ao quadrado do perímetro de *Pc*?

Resposta: - Sendo l a medida de um qualquer dos lados do triângulo retângulo o perímetro do pentágono "pousado" nesse lado é $5 \times l$.

Como o perímetro é proporcional ao lado a soma dos quadrados dos perímetros dos catetos é igual ao quadrado do perímetro da hipotenusa (*vê a resolução do Desafio 2 aqui*).

Se, em vez de um pentágono, tiveres um polígono regular com N lados, sendo N > 2, basta na fórmula do perímetro substituir 5 por N para obteres o resultado.

E quanto às áreas, consegues provar que a soma das áreas de *Pa* e *Pb* é igual à área de *Pc*?

Resposta: - A área do pentágono "pousado" num dos lados do triângulo, de medida l, um valor genérico a ser substituído pelos comprimentos de *a*, *b* e *c*, *é* igual a $5 \times A_l$ onde A_l é a área do triângulo ABO onde O é o centro do pentágono (*ver figura*).

Ora $A_l = \frac{1}{2} \times\ l \times a_p$ onde a_p é o apótema do polígono. Mas podes escrever $A_l = \frac{1}{2} \times \frac{a_p}{l} \times\ l^2$ Como $\frac{a_p}{l}$ é o mesmo para todos os três pentágonos, pois os triângulos ABO para os vários lados são semelhantes, as áreas são proporcionais aos quadrados dos lados e, por isso, e como vimos, a soma das áreas de *Pa* e *Pb* é igual à área de *Pc*.

Para um polígono regular de N lados a prova pode fazer-se de forma análoga.

Considera agora as estrelas inscritas nos pentágonos:

Será que o quadrado do perímetro da estrela da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos perímetros das estrelas dos catetos?

O perímetro da estrela correspondente ao lado de comprimento l é igual $10 \times \overline{CP}$ que pode escrever-se $10 \times \frac{\overline{CP}}{l} \times l$. Mas $\frac{\overline{CP}}{l}$ tem o mesmo valor para todas as estrelas pois trata-se de medidas de lados correspondentes de triângulos semelhantes. Então o perímetro é proporcional a l logo a resposta é sim.

E será que a área da estrela da hipotenusa é igual à soma das áreas das estrelas dos catetos?

A área da estrela é igual à área do pentágono menos cinco vezes a área de CBP.

A área do pentágono já vimos que é proporcional a l^2.

A área de CBP é igual $\frac{1}{2} \times h \times l = \frac{1}{2} \times \frac{h}{l} \times \ l^2$ onde $\frac{h}{l}$ tem o mesmo valor para todas as estrelas dada a semelhança dos triângulos de base l e altura h.

Então a área da estrela é a diferença de dois valores proporcionais a l^2 logo é proporcional a l^2 e, portanto, a resposta é sim.

Consegues generalizar este resultado a outros polígonos não regulares? E a outras figuras no plano?

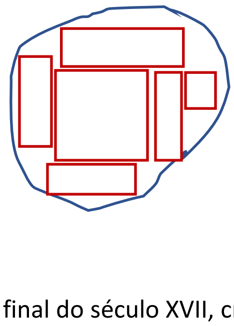
Pois agora isto é para quem gosta de explorar florestas, descobrir as suas maravilhas e mistérios, aprender e tornar-se mais forte com a experiência.

Pois se quiseres entrar na aventura de tentar descobrir se conseguimos ir mais longe, chegar a resultados mais gerais, com o conhecimento de que a proporcionalidade das áreas das figuras aos quadrados dos lados de um triângulo retângulo garante a igualdade entre a soma das áreas das figuras nos catetos e a área da figura na hipotenusa, então acompanha-nos e vais ter a emoção de ter um pequeno contacto com ideias vindas da Antiga Grécia das quais surgiu O Cálculo Integral[1].

Vamos então tentar ir mais além e aplicar o resultado a três regiões no plano, F_a, F_b, F_c, limitadas por linhas contínuas e fechadas, cada uma contendo os extremos dos lados, respetivamente, *a*, *b*, *c*, de um triângulo retângulo[2].

O primeiro problema que se põe é o de saber como calcular a área destas regiões. Em geral não há uma fórmula para a calcular.

Então o que fazemos? O mais natural é tentar "cobrir", ou "integrar", a região cuja área queremos calcular com regiões contidas nela cuja área sabemos calcular, retângulos por exemplo. Vê a figura em baixo onde as somas das áreas dos retângulos a vermelho dão uma aproximação, por defeito, da área da nossa região.



[1] Newton e Leibnitz, pais do Cálculo Integral, no final do século XVII, criaram os símbolos e obtiveram, independentemente, os resultados que permitiram calcular áreas de regiões como estas mesmo para linhas de delimitação bastante "estranhas". A paternidade gerou conflito, à altura de grandes génios: se tiveres curiosidade vê o fim deste artigo.

[2] É o caso das estrelas ou dos pentágonos, sendo que neste último caso as regiões contêm mesmo os lados.

No sentido de obter coberturas tão perfeitas quanto possível podemos optar por uma forma sistemática de construir os retângulos.

Fazemos o seguinte:

i) "Encerramos" a nossa região $\mathcal{R}$ num retângulo dotado de uma quadrícula com retas verticais e horizontais em número finito e escolhidas arbitrariamente;
ii) Consideramos todas as quadrículas possíveis do nosso retângulo;
iii) Para cada uma dessas quadrículas, adicionamos as áreas de todos os retângulos contidos em $\mathcal{R}$ e, assim, obtemos um valor para a área da nossa figura por defeito[3];
iv) O conjunto $\mathcal{C}$ de valores obtidos é um conjunto de valores menores ou iguais à área de $\mathcal{R}$, mas que contém números arbitrariamente próximos dessa área pois podes intuir que quando a área do maior dos quadrados da quadrícula tende para zero os quadrados "dentro" da figura cobrem-na cada vez melhor[4].
v) Finalmente, a área que procuramos será, naturalmente, o único número maior ou igual aos elementos de $\mathcal{C}$ que pode ser aproximado, com erro arbitrariamente pequeno, por elementos de $\mathcal{C}$.

Agora vamos ver o que acontece se ampliarmos ou reduzirmos a nossa região aplicando uma homotetia de razão *k* (*k > 0*): isto significa que a distância entre quaisquer dois pontos é multiplicada por *k*.

Então, e para qualquer quadrícula, a área de cada um dos seus retângulos é multiplicada por k^2, logo a área da reunião dos retângulos contidos na nossa região é também multiplicada por k^2. Assim conjunto dos valores das aproximações por defeito obtém-se de $\mathcal{C}$ multiplicando cada um dos seus elementos por k^2, logo a área da nova região obtém-se da inicial multiplicando por k^2.

Quando transformamos, usando uma composição de uma rotação com uma translação e com uma homotetia, F_a em F_b, ou F_c, mas de forma que os extremos de *a* se transformem nos extremos de *b* no primeiro caso e nos de *c* no segundo, *k* é igual ao quociente do comprimento de *b, c(b)* pelo comprimento de *a, c(a),* e *k'* é igual ao quociente do comprimento de *c*, *c(c), por c(a).*

As rotações e as translações não alteram a área pelo que, designando as áreas de F_a, F_b, F_c por

a (F_a), $\mathrm{a}(F_b)$, a (F_c) é: $\frac{\mathrm{a}(F_b)}{\mathrm{a}(F_a)} = k^2$ e $\frac{\mathrm{a}(F_c)}{\mathrm{a}(F_a)} = k'^2$ podemos escrever:

$\mathrm{a}(F_a) = \frac{\mathrm{a}(F_a)}{c(a)^2} \times c(a)^2$, $\mathrm{a}(F_b) = \mathrm{a}(F_a) \times k^2 = \frac{\mathrm{a}(F_a)}{c(a)^2} \times c(b)^2$, $\mathrm{a}(F_c) = \mathrm{a}(F_a) \times k'^2 = \frac{\mathrm{a}(F_a)}{c(a)^2} \times c(c)^2$

E vemos que as áreas das figuras são proporcionais aos quadrados dos lados do triângulo retângulo logo a soma das áreas das figuras nos catetos é igual à área da figura na hipotenusa.

Repara como o conhecimento deste resultado muito simples teria simplificado as provas anteriores: é que, e no caso dos círculos, dos polígonos e das estrelas, para estabelecer a igualdade das áreas, bastava notar que, depois de colocar uma das figuras na posição correta com uma rotação e uma translação, qualquer das outras podia ser obtida com uma redução ou uma ampliação.

É assim em Matemática, resultados complicados são muitas vezes tornados simples com o desenvolvimento da teoria.

Um grande matemático dizia lapidarmente: "Não há nada mais prático do que uma boa teoria".

[3] Tenta fazer um esboço para várias quadrículas, progressivamente "mais finas", para "sentires" a aproximação.
[4] Isto acontece sempre que a região é uma região com área.