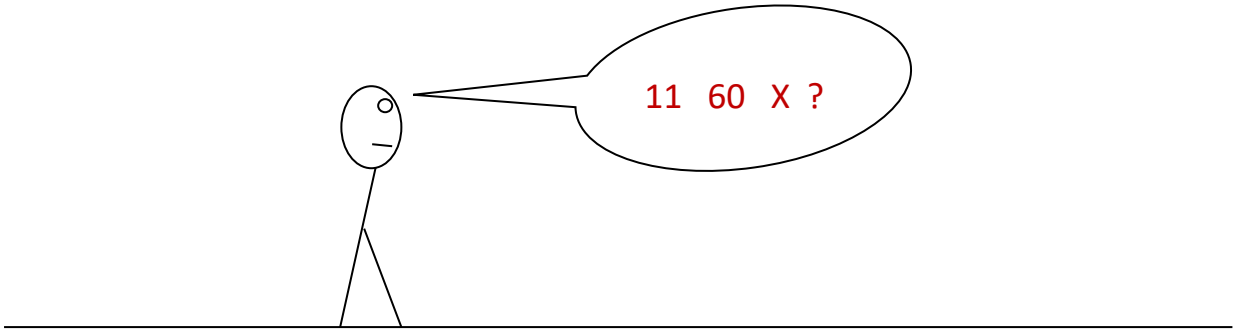
2022 Junho

Problema 14 **Desafio 5**

À procura de Ternos Pitagóricos



O Desafio

Três triângulos retângulos são todos diferentes na forma, mas têm áreas iguais com o valor 3360 cm2.

Os lados de um dos triângulos medem 140, 48 e 148 centímetros e os de outro medem 80, 84 e 116 centímetros.

A medida de cada um dos lados do terceiro quadrado é um número inteiro de centímetros.

Consegue obter as dimensões do terceiro triângulo?

A propósito, se achares difícil não estás sozinho.

Lewis Carol, o célebre autor de Alice no País das Maravilhas, e que era professor de Matemática em Oxford, refere num dos seus livros que tinha recebido de Nova Iorque o problema de encontrar três triângulos retângulos com a mesma área e medidas inteiras.

Tinha estado até às quatro da manhã à procura: tinha encontrado dois, mas não tinha conseguido encontrar o terceiro.

Claro que o teu problema é mais fácil pois, pela construção do problema, já conheces a área do triângulo retângulo correspondente ao terno que procuras.

Ainda assim podemos dar-te duas pistas que te podem ajudar a conseguir, sem dificuldade, o que tinha sido tão difícil para Carrol.

A primeira pista, que não estava disponível para Charles Lutwige Dodgson é

Recorrer a um programa informático

Podes escrever um programa informático que gere os pares de inteiros positivos (a,b) cujo produto é o dobro de 3360.

Encontrado (a,b) verificas se $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ é inteiro, se for o caso registas o terno (a, b, c).

A segunda pista, é-te fornecida por **Euclides**

No seu célebre livro *Elementos,* Euclides[1] dá a noção de **Terno Pitagórico Primitivo**:

trata-se de Ternos Primitivos que não têm um divisor primo comum[2]. Chamam-se primitivos porque qualquer outro pode ser derivado de um destes multiplicando *a, b, c* por um inteiro *k* maior do que um. Por exemplo os ternos primitivos de (140, 48, 148) e (80, 84, 116) são, respetivamente, (35, 12, 37) e (20, 12, 29) como podes verificar.

Ora em *Os Elementos,* Euclides demonstrou que qualquer Terno Pitagórico Primitivo (*a, b, c*) pode ser obtido a partir de dois inteiros positivos *m* e *n,* com *m > n,* co primos e de diferente paridade, pondo $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$.

E demonstrou mais, demonstrou que qualquer terno obtido com m, n nestas condições é Pitagórico e Primitivo.

Queres tentar provar estes dois resultados? Não é difícil e é um fantástico exercício de Lógica e Aritmética, incentivo-te fortemente a tentares. Quem sabe se não será a tua primeira demonstração! Se fores muito jovem e for o caso temos um/a geómetra em potência.

A área de um triângulo gerado por *m* e *n,* com *m > n,* será: $a(m,n) = m^3n - mn^3$.

Facilmente reconheces que as medidas dos triângulos referidos no enunciado são gerados, respetivamente, por *m = 12* e *n = 2* e por *m = 10 e n = 4.*

O problema consiste agora em encontrar outros geradores que mantenham o valor de $a(m,n)$: só tens de experimentar dando valores a *m* e *n* até obteres ternos correspondentes a triângulos com a mesma área.

[1] *Elementos* de Euclides estima-se que tenha tido mais de mil edições publicadas: só a Bíblia bate este número.
[2] No caso dos Ternos Pitagóricos isto implica que a, b e c são co primos dois a dois como podes verificar.