# 2018 outubro

## Problema 2: Resolução

**Nota:** *Dedicamos esta resolução à malta muito jovem que é sensível ao fascínio da Matemática e tem gosto por conhecer as origens das suas noções e pensamento.*

A primeira ideia que ocorreu na cabeça do nosso Ali Babá, e ocorreu de imediato, foi a de que se colocasse moedas entregues pelos ladrões num dos pratos da balança e igual número de moedas verdadeiras no outro prato o peso P, em gramas, que tinha de colocar no primeiro para equilibrar a balança era igual ao número de moedas falsas.

De facto, por cada moeda falsa havia que acrescentar um grama para compensar o peso que a moeda tinha a menos.


E começou a pensar quantas moedas devia colocar das entregas de cada um dos larápios de forma a que esses números denunciassem aqueles que tinham roubado.

Ora acontece que ele tinha estado recentemente na célebre Casa da Sabedoria em Bagdad a ouvir o grande matemático Al-Khwarizmi falar sobre o seu recente livro Hisab Al-Jabr Al-Muqabala[1].

Al-Khwarizmi

Casa da Sabedoria: Bagdad

[1] Pode gostar de ver uma referência à origem do termo Álgebra na resolução do problema 1 de setembro de 2106 **aqui**.

Nele ele divulgava a representação dos números na forma decimal, conhecimento que vinha da Índia e que, dizia-se, ia mudar a face do ocidente: as operações algébricas tornavam-se mais fáceis e consequentemente as operações de negócio.

O grande sábio tinha referido que uma soma de potências diferentes de 10, por exemplo $10^5 + 10^3 + 10 + 1$, se representava por uma sequência de zeros e uns. Na posição i ficaria um 1 se aparecesse a parcela $10^{i-1}$ e 0 no caso contrário.

No exemplo dado a sequência seria 101011

E a solução estalou: numerava os transportadores de 1 a 7 e retirava 1 moeda das entregas do primeiro, 10 das do segundo, $10^2$ das do terceiro até ao sétimo do qual recolhia $10^6$ moedas.

Colocava as moedas num dos pratos da balança, igual número de moedas boas no outro, equilibrava com um peso P, escrevia o peso P em gramas na forma decimal e os uns da representação denunciavam os ladrões!

No exemplo dado os larápios seriam os números 1, 2, 4 e 6!

Mas de quantas moedas ia precisar?

Sentou-se a fazer umas contas…

Escreveu: $M = 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1$

Mais de 1 milhão!... ficou descoroçoado: o seu tesouro não tinha 1 milhão de moedas!...

Até que se lembrou que, no debate final que se seguiu à apresentação de Al-Khwarizmi, um dos matemáticos presentes comunicou que tinha conseguido provar que qualquer inteiro positivo se pode escrever de forma única como soma de diferentes potências de 2.

Al-Khwarizmi concentrou-se profundamente e finalmente deduziu:

- Então qualquer natural se pode escrever como: $N = i_1 2^0 + i_2 2^1$+…+$i_s 2^{s-1}$ onde os *i's* são 0 ou 1. Logo *N* pode ser escrito como uma sequência de 0's e 1's onde o *i* na posição *j* indica se a potência $2^{j-1}$ aparece ou não na decomposição de *N.*

Foi então que pareceu entrar em transe… E disse, depois de profundo e prolongado silêncio durante o qual parece ter atingido as alturas de um profeta…

- Diviso que em séculos futuros esta possibilidade vai mudar a forma com a humanidade vive e trabalha!

Lembrando-se deste episódio Ali Babá imediatamente percebeu o que fazer: retirava 1 moeda das entregas do primeiro, 2 das do segundo, $2^2$ das do terceiro até ao sétimo do qual recolhia $2^6 = 64$ moedas.

E cá está: escrevia o peso P como soma de potências de 2 e registava a sequência de 0's e 1's correspondente: os 1's da sequência apontavam para os que o tinham enganado.

Pôs mão à obra e obteve $P = 71\ g$. Notou que $P = 2^6 + 2^2 + 2 + 1$ logo a sequência é 1000111…

E apanhou os ladrões que o tinham roubado: os números 1, 2, 3, 7!

## Apêndice

***Representação de um natural $N$ na base 2***

$N = 2 \times n_1 + r_1$

$n_1 = 2 \times n_2 + r_2$

$n_2 = 2 \times n_3 + r_3$

............................

$n_j = 2 \times 1 + r_j$

$N = 1\, r_j \dots r_3 r_2 r_1$