2018 Setembro

Problema 2: Resolução

1.º desafio

Alinhando as cestas e representando as sardinhas por pontos e as separações entre cestas contíguas por traços verticais e dispondo estes elementos numa fila de catorze posições …

. . . | |. . . . -> Cesta do meio vazia

| | . . . . -> Duas cestas da esquerda vazias

o problema reduz-se a saber:

i) quantas são as maneiras diferentes de escolher, entre as catorze posições, as posições para os separadores; obviamente são as combinações de catorze dois a dois: $\binom{14}{2}$;
ou

ii) quantas são as maneiras diferentes de escolher, entre as catorze posições, as posições para as sardinhas; obviamente são as combinações de catorze doze a doze: $\binom{14}{12}$

Portanto 91.

Se o número de sardinhas fosse N e o número de cestas fosse P a resposta seria:

$$\binom{N+P-1}{P-1} = \binom{N+P-1}{N}$$

2.º desafio

Se os cestos são indistintos então o número diferente de distribuir as sardinhas pelas cestas é o número diferente de formas de escrever o número 12 como soma de três parcelas maiores ou iguais a zero independentemente da ordem.

Para contar essas formas o leitor/a pode contar, para cada N de 4 a 12, o número de maneiras diferentes de distribuir as sardinhas pelos cestos de forma a que o cesto com mais sardinhas tenha N sardinhas. Depois soma tudo… para N de 4 a 12.

Também pode obter, muito facilmente, este número a partir das 91 formas diferentes de distribuir as sardinhas por cestos distintos se notar que:

i) Nos casos em que os números de sardinhas nos três cestos são diferentes as permutações das sardinhas pelos três cestos, $P_3 = 3!$, correspondem a uma só distribuição por cestos indistintos;

ii) Nos casos em que o número de sardinhas em dois dos cestos é o mesmo e diferente do número de sardinhas no outro cesto as três formas de colocar as sardinhas deste último cesto nos três cestos correspondem a uma só distribuição por cestos indistintos.

Se quiser conferir o resultado a que chegou pode enviar-nos um email para:

jvf.ClubeMat.SPM@gmail.com

Um desafio e tanto …

Neste último caso o número pedido é o número de formas diferentes de escrever 12 como soma de duas ou mais parcelas inteiras e positivas. Por exemplo 12 = 11 +1, ou 12 = 10 + 1 + 1, ou 12 = 10 + 2.

Trata-se no fundo de encontrar o número de formas diferentes de partir 12 em parcelas inteiras e positivas.

Ora acontece que se juntarmos a este número uma unidade, que pode entender como a escrita de 12 com uma só parcela, temos o que em Teoria de Números se chamam as partições de 12, $P(12)$.

Se o leitor/a viu o filme "*O Homem que conhecia o Infinito*" lembra-se que Hardy teve enorme dificuldade em impor o génio de Ramanujan junto de um corpo de professores do Trinity College que, de facto, o detestavam. Numa das cenas Hardy corre atrás de Major Percy MacMahon, especialista em Análise Combinatória e Teoria dos Números, e para chamar a sua atenção grita "Partitions!!!". Nessa altura o professor parou interessado… e acaba a competir com Ramanujan no cálculo de $P(200)$ … e a perder pois Ramanujan usou a sua fórmula!

E essa fórmula espantosa[1], mas aproximada, que Hardy e Ramanujan encontraram, onde intervêm as constantes π e e (para contar partições caro leitor!!!…), para o número de partições de um inteiro positivo é esta:

$$P(N) = \frac{1}{4 \times N \times \sqrt{3}} e^{2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}}$$

Dá o valor de $P(N)$ com erro que, em percentagem, tende para zero quando N tende para infinito[2].

[1] Em 2010 o japonês naturalizado nos US Ken Ono encontrou uma fórmula finita e exacta. (Video_01 Video_02)

[2] Implicará isto que o erro tende para zero?

Aplicando a fórmula ao nosso caso obtemos:

$$P(12) = \frac{1}{4\times 12\times\sqrt{3}} e^{2\pi\sqrt{2}} \cong 86{,}9$$

De facto $P(12) = 77$ e, portanto, o número de formas diferentes de distribuir as sardinhas pelas cestas nas condições indicadas é 76.