2020 Fevereiro

Problema 2: **Resolução**

" At the age of eleven, I began Euclid, with my brother as my tutor.
This was one of the great events of my life, as dazzling as first love.
I had not imagined that there was anything so delicious in the world."

Bertrand Russel

Os ternos de inteiros dados no enunciado, (140, 48, 148) e (80, 84, 116), são exemplos dos célebres Ternos Pitagóricos, os ternos (*a, b, c*) de inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$, que, como é óbvio, são as medidas dos lados dos triângulos rectângulos cujos lados têm medidas inteiras[1].

Destes aqueles em que os três números não têm um divisor primo comum[2] dizem-se Ternos Primitivos, e isto porque qualquer outro pode ser derivado de um destes multiplicando *a, b, c* por um inteiro *k* maior do que um. Por exemplo os ternos primitivos de (140, 48, 148) e (80, 84, 116) são, respetivamente, (35, 12, 37) e (20, 12, 29) como pode verificar.

No seu célebre livro *Elementos,* Euclides[3] demonstrou que qualquer Terno Pitagórico Primitivo (*a, b, c*) pode ser obtido a partir de dois inteiros positivos *m* e *n,* com *m > n,* co primos e de diferente paridade, pondo $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$. E que qualquer terno obtido com m, n nestas condições é Pitagórico e Primitivo (*Ver Apêndice no fim*).

A área de um triângulo gerado por *m* e *n,* com *m > n,* será: $a(m,n) = m^3n - mn^3$.

Facilmente se reconhece que as medidas dos triângulos referidos no enunciado são gerados, respetivamente, por *m = 12* e *n = 2* e por *m = 10 e n = 4.*

O problema consiste agora em encontrar outros geradores que mantenham o valor de $a(m,n)$.

Se experimentar com *n = 1* vai ver que para *m = 15* obtém a mesma área.

Estes valores geram o triângulo de lados: 226, 224 e 30.

Curiosidade:

Lewis Carol refere num dos seus livros que tinha recebido de Nova Iorque o problema de encontrar três triângulos retângulos com a mesma área e medidas inteiras.

Tinha estado até às quatro da manhã à procura: tinha encontrado dois mas não tinha conseguido encontrar o terceiro.

---

[1] Ou, sendo mais claro, os três lados são comensuráveis o que significa que há um segmento *u* que cabe um número inteiro de vezes em *a, b* e *c*.
[2] No caso dos Ternos Pitagóricos isto implica que a, b e c são co primos dois a dois como pode verificar.
[3] *Elementos* de Euclides estima-se que tenha tido mais de mil edições publicadas: só a Bíblia bate este número.

Apêndice

Redigimos esta demonstração, muito simples, da segunda proposição a pensar em alunos do fim do básico, ou do secundário, com interesse pela Matemática, desafiando-os a tentar a prova antes ler as próximas linhas para que comecem a ganhar o gosto e a aptidão para chegar a um resultado a partir de outro por dedução lógica. É afinal a isto a essência do trabalho em matemática!

Proposição

"***Sendo m e n dois inteiros positivos, com m > n, co primos e de diferente paridade, e pondo*** $\boldsymbol{a = m^2 - n^2}$***,*** $\boldsymbol{b = 2mn}$ ***e*** $\boldsymbol{c = m^2 + n^2}$***, (a, b, c) é um Terno Pitagórico Primitivo***."

Provar que $a = m^2 - n^2, b = 2mn\,, c = m^2 + n^2$ *formam um Terno Pitagórico reduz-se a provar que* $a^2 + b^2 = c^2$*; isto consegue com cálculos muito simples: é só fazer contas.*

Para provar que é um Terno Primitivo há que provar que a, b e c não têm um factor primo comum.

Ora veja: se houvesse um factor primo p comum a a, b e c, p dividiria $a = m^2 - n^2$ *e* $c = m^2 + n^2$.

E este primo p *seria diferente de 2 pois, como m e n têm, por hipótese, paridades diferentes e como elevar ao quadrado não altera a paridade,* m^2 *e* n^2 *têm paridades diferentes; e, como a soma ou diferença de dois números de paridade diferente é ímpar, a e c seriam ímpares logo não divisíveis por 2.*

O primo p, dividindo a e *c dividiria a+ c e a- c, ou seja,* $2m^2$ *e* $2n^2$.

Como é diferente de 2 dividiria m^2 *e* n^2 *logo*[4] *dividiria m e n: mas tínhamos suposto que m e n eram co primos.*

Caso tenha interesse pode ver uma demonstração da primeira implicação, simples, elegante, diria mesmo primorosa, embora um pouco mais longa neste link:

http://www.math.ualberta.ca/~isaac/math324/s12/pythag_triples.pdf

[4] Se a decomposição de *a* em factores primos é $a = {p_1}^{n_1} \times {p_2}^{n_2} \times \ldots \times {p_k}^{n_k}$ então $a^2 =. {p_1}^{2n_1} \times {p_2}^{2n_2} \times \ldots \times {p_k}^{2n_k}$
Se *p,* primo, divide a^2 é um dos p_i, logo divide *a.*