

2020 Dezembro

Problema 10: Sábado de manhã - Conversa no Café

Vejam só quem o Professor Antunes encontrou numa mesa de um Café, perto da Escola, num sábado de manhã! Pois, os seus alunos João e Bernardo ... a falarem sobre o Problema 10 do Clube SPM.



Claro que o convidaram a sentar-se à mesa e esta foi a conversa que se seguiu.

Professor Antunes (PA): - Sabem que, quando há anos contactei pela primeira vez com o conto de Borges, me interroguei sobre se a intenção dele era levantar um ponto literário, filosófico ou matemático, neste caso sobre noção de infinito cujos mistérios e subtilezas intrigavam tanta gente na altura. Ainda tenho dúvidas...

João (J): - Eu estive a calcular o número de livros diferentes naquela Biblioteca e cheguei a um número impressionante. Reparem, em cada página há 80×40 posições para escrever caracteres e, como há ao todo 410 páginas, o número total de posições livres para os colocar é $80 \times 40 \times 410 = 1.312.000$.

Como em qualquer posição posso colocar um qualquer dos 25 caracteres vai haver $25^{1.312.000}$ livros diferentes.

PA: - Impressionante, de facto, principalmente se pensarmos que se estima que haja 10^{80} átomos no Universo! Essa Biblioteca só poderia existir na cabeça do Borges. Mesmo assim seria finita pois sabemos o número dos seus livros!

Bernardo (B): - Alto aí! Livros? Eu diria antes tomos porque um livro pode ser constituído por vários tomos.

PA: - Bem visto! E sendo assim qualquer coleção de tomos seria um livro, existente ou potencial!

J: - E, nesse caso, quantos livros haveria?

PA: - Imagina que tens dois tipos de etiquetas, brancas e vermelhas, e que, para escolher um livro, marcavas os seus tomos com etiquetas vermelhas e os outros com etiquetas brancas. O número de livros seria o número de formas diferentes de colocar as etiquetas nos tomos. Duas hipóteses no primeiro tomo, 2×2 nos dois primeiros, $2 \times 2 \times 2$ nos três primeiros... ao todo $2^{25 \times 1.312.000}$ livros!

B (atalhando): - Menos um, porque com as etiquetas todas brancas não há tomos logo não há livro!

J: - Bem visto. Um número de outro universo, mas mesmo assim finito. Ainda assim não contemplamos o caso de ordenações diferentes dos tomos conduzirem a livros diferentes.

B: - E podemos ainda admitir que num livro o mesmo tomo se repete um número finito de vezes, mas sem pormos um limite superior a esse número.

PA: - Nesse caso, se fixássemos um natural N qualquer, haveria livros com mais de N tomos. Estaríamos com aquilo que se chama um infinito potencial. E a Biblioteca, a existir, seria um infinito em ato, pensável se vocês quiserem, uma noção central nos trabalhos do Pai da Teoria dos Conjuntos [George Cantor](#).

J: - Também estivemos aqui às voltas com esta coisa do tempo esperado.

PA: - Aqui, para facilitar, vamos supor que não há livros com mais de um tomo ... vocês pensam depois no caso geral se quiserem entreter-se. Reparem que o vosso livro preferido pode estar em qualquer lugar da Biblioteca com igual probabilidade.

Assim, se A e B forem posições simétricas em relação à posição média M , aparecerá tantas vezes em A como em B . Ora o tempo que vão gastar para chegar de M a B é igual ao que vão poupar se, em vez de ir até M vos bastar ficar em A . Assim o tempo que podem “esperar”¹ gastar para chegar ao vosso livro será o tempo para chegar a M .

Sendo T o total de livros na Biblioteca vai ser $M = \frac{1+T}{2}$. Como uma célula tem 640 livros ($4 \times 5 \times 32$), gastando 12 horas para percorrer a célula vão necessitar, em média, de $\frac{M}{640} \times 12$ horas para encontrar o dito livro.

Ou seja: $\frac{1+25^{1.312.000}}{1280} \times 12$ horas ou $\frac{1+25^{1.312.000}}{1280} \times 12 \times \frac{1}{365 \times 24}$ anos,
superior a $10^{1.834.097}$ anos.

B (sempre atento): E se pensarmos que o nosso Universo tem $3,8 \times 10^9$ anos, caramba nunca vamos encontrar livro nenhum!

PA: - Exato, esta grande promessa do Borges não passa de uma miragem.

J: - Agora acho que estou a ver a resposta para a próxima questão.

Em 100 anos, ou $100 \times 365 \times 2$ meios dias, consigo percorrer $L = 100 \times 365 \times 2 \times 640 = 46.720$ mil livros.

A probabilidade P de um livro já escrito estar nos primeiros L livros consultados é 1 menos a probabilidade de nenhum lá estar.

Ora, esta é igual ao número de conjuntos de 150 milhões de posições que eu posso formar com as $T - L$ posições que me vão escapar dividido pelo número de conjuntos de 150 milhões de posições que posso seleccionar no conjunto das posições da Biblioteca.

PA (escrevendo num papel): - Certo, designando os 150 milhões de livros escritos por E e fazendo as contas temos:

$$P = 1 - \frac{\binom{T-L}{E}}{\binom{T}{E}} = 1 - \frac{(T-E) \times (T-E-1) \times \dots \times (T-E-(L-1))}{T \times (T-1) \times \dots \times (T-L+1)} = 1 - \prod_{i=0}^{L-1} \frac{T-E-i}{T-i}$$

É fácil reconhecer que este valor é inferior a 10^{-2000} como podem ver se consultarem o motor de busca Wolfram Alfa (*ver Nota no fim*).

Ou seja, podem desesperar de encontrar qualquer livro já escrito! Borges presenteia-nos com uma Biblioteca completa e ... completamente inútil.

B: - E está-se a ver o que espera a Censura! Para além do livro em questão vai ter de tirar todos os que se obtêm desse seleccionando todos os conjuntos de um, dois, ..., dez caracteres e substituindo cada elemento desses conjuntos por um dos 24 caracteres diferentes dele.

¹ O PA recorre aqui à noção de Esperança Matemática. Neste caso $E(t) = \sum_{i=1}^T \frac{1}{T} \times t_i$ onde t_i é o tempo gasto para encontrar um livro na posição i .

