## 2021 Fevereiro

## Problema 13: A história de uma resolução …

***… dedicada à malta jovem da idade do Yuri!***


Quando chegaram à esplanada sobranceira à praia o Yuri sentou-se a uma das mesas e escreveu no seu caderno:

*$i$ = a minha idade; $a$ = idade do meu Avô; $b$ = idade da minha Avó*

*Como disse o Avô:* $a = 4i$. *E disse ainda que dentro de $N$ anos vou ter metade da idade dele:*

$$2(i+N) = 4i + N \quad ou \quad 2i + 2N = 4i + N \;\; (1) \quad ou \quad N = 2i \;\; (2)$$

*Daqui a $N$ anos sobre nós os três passaram $3N$ anos que, de acordo com o que disse, serão:*

*188 – 110 = 78 anos*

*Logo: N = 26 e … $i$ = 13, $a$ = 52, $b$ = 45*

E para documentar a sua resolução escreveu estas **Notas**:

*(1) Aqui apliquei a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.*

*(2) Aqui transpus parcelas subtraídas a um membro da equação para o outro, operação que em árabe se chamava **Al-Jahbr,** e que é o título de um livro muito famoso, escrito por volta do ano 825 DC, pelo matemático árabe **Abu Muhammad <u>Al Khwarizmi</u>** dedicado ao estudo de equações.*

*A palavra Al-Jahbr era entendida como a reconstituição do todo a partir das partes.*

*Em Matemática podemos entender o título como referência à transposição de termos subtraídos a um dos membros de uma equação para o outro (em árabe Al-Jahbr) e ao cancelamento de termos iguais nos dois membros (em árabe Al-Muqabalah).*

*Foi o termo **Al-Jahbr** que deu origem à palavra **Álgebra.***

*Não me admiro que o nome de tão importante campo da Matemática venha do nome do primeiro grande Tratado dedicado ao seu inicial objeto de estudo.*

## *Nota Final: A resolução de sistemas de equações lineares*

Yuri apercebeu-se logo de que tinha acabado de resolver um sistema muito simples de quatro equações a quatro incógnitas.

Mas sabes, ele tinha uma enorme curiosidade, uma enorme vontade de saber, e tinha ouvido falar do **Príncipe das Matemáticas, *Princeps Mathematicorum*** tinha-lhe chamado o seu pai, numa altura em que, numa das muito empolgantes conversas que tinham à mesa, tinha dito que ele tinha desenvolvido um método simples, programável e brilhante, como aliás tudo em que tocava, tinha o pai sublinhado com enorme admiração, para resolver estes sistemas com qualquer número de equações e incógnitas: **O Método de Condensação** com o seu nome … **de Gauss**.


**Carl Friedrich Gauss**


Não se conteve e foi ter com o Professor Gohan que ficava sempre feliz por alimentar e estimular a sua curiosidade e vontade de saber.

Este é um resumo da conversa que tiveram:

**Professor Gohan (G)**: - Claro que podias ter escrito as condições do problema sob a forma de um sistema de quatro equações a quatro incógnitas:

$$\left(\begin{array}{c} 4i - a = 0 \\ i + a + b = 110 \\ i + a + b + 3N = 188 \\ 2i - a + N = 0 \end{array}\right)$$

Agora imagina que abstrais das incógnitas e crias um quadro com os restantes números, chama-se uma matriz, onde as linhas correspondem às equações e cada coluna a uma incógnita exceto a última que contém os termos independentes.

Obténs esta matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 110 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 3 & 188 \\ -1 & 0 & 2 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

A primeira coluna corresponde à incógnita *a,* a segunda a *b,* a terceira a *i,* a quarta a *N* e a quinta, a vermelho, aos termos independentes.

O que Gauss notou é que há certas operações elementares que transformam este quadro num outro que corresponde a um sistema com a mesma solução … e que era possível usar isto para desencadear um processo para, de forma sistemática, resolver qualquer destes sistemas. Vou-te explicar…

Supõe que tens uma *máquina imaginária*, com uma *manivela*, e que a "*alimentas com esta matriz*".

E supõe que de cada vez que "*dás à manivela*", a "*máquina*", recorrendo a estas operações elementares, consegue transformá-la numa nova matriz, num novo quadro, que tem mais um zero nas entradas a preto que não estão na diagonal (*que eu marquei a negrito no quadro acima*) que liga a entrada da primeira linha primeira coluna à da quarta linha quarta coluna.

E imagina que o processo se pode repetir: introduzes o novo quadro na máquina, "*voltas a dar à manivela*" e a *máquina* acrescenta mais um zero "a preto" fora da diagonal!

Ao fim de, no máximo, "*doze voltas à manivela*" obténs um quadro como este:

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & s & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & t & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & u & f \end{pmatrix}$$

*Se r, s, t e u são não nulos, como acontece neste nosso caso, multiplicas cada linha pelo seu inverso e ficas com …*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & c/r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d/s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e/t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f/u \end{pmatrix}$$

*… ou seja, com o Sistema Resolvido, ao modo genial de* **Carl Friedrich Gauss***, o maior matemático de todos os tempos*[1]*!*

**Yuri (Y)**: - E que Operações Elementares são essas Professor?

**G**: - São três muito simples, que a "*máquina*" vai executando à medida que "*dás à manivela*":

E1 – Trocar linhas;
E2 – Multiplicar uma linha por um número diferente de zero;
E3 – Substituir uma linha pela sua soma com o produto de outra por uma constante.

Tenho a certeza de que vais ser capaz de provar que, de facto, cada uma delas não altera a solução do sistema[2].

Queres ver o processo em ação?

**Y**: - Claro, como é que faço?

**G**: - Vais ao site do Wolphram Alpha, aqui, e introduzes o quadro na linha de input. O Comando é este:

*Solve 4i-a = 0, a+b+i = 110, a+b+i+3N = 188, -a+2i+N = 0*

O programa vai apresentar-te o seguinte output[3] onde vês o processo a desenrolar-se passo a passo… … e vais descobrir a ideia simples e genial do grande Carl Friedrich Gauss.

[1] Há quem coloque **Arquimedes** e **Isaac Newton** no firmamento com idêntico brilho.
[2] Sabem que o Yuri, quando chegou a casa, demonstrou estes resultados num abrir e fechar de olhos? A prova é muito simples.
[3] Pode ser necessária uma subscrição para obter este resultado.

STEP 1

Solve the following system:

$$\begin{cases} 4\,i - a = 0 \\ a + b + i = 110 \\ a + b + i + 3\,N = 188 \\ -a + 2\,i + N = 0 \end{cases}$$

STEP 2

Express the system in matrix form:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ i \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 110 \\ 188 \\ 0 \end{pmatrix}$$

STEP 3

Write the system in augmented matrix form and use Gaussian elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 110 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 188 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

STEP 4

Add row 1 to row 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 188 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

STEP 5

Add row 1 to row 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 188 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

STEP 6

Subtract row 1 from row 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 188 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

STEP 7

Subtract row 2 from row 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 78 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

STEP 8

Divide row 3 by 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

STEP 9

Swap row 3 with row 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

STEP 10

Subtract row 4 from row 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

STEP 11

Divide row 3 by $-2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

STEP 12

Subtract $5 \times$(row 3) from row 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

STEP 13

Subtract $4 \times$(row 3) from row 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

STEP 14

Multiply row 1 by $-1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

STEP 15

Collect results:

Answer:

$$\begin{cases} a = 52 \\ b = 45 \\ i = 13 \\ N = 26 \end{cases}$$