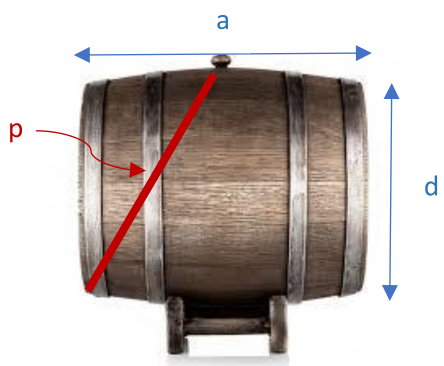
2022 Fevereiro

Problema 10 Resolução

Sabem onde fomos encontrar este fim de semana a Professora Manuela e o Professor Eduardo?

Pois nem mais nem menos do que numa típica Taberna Heuriger dos subúrbios de Viena, a saborearem um delicioso e suave tinto austríaco enquanto discutiam, com entusiasmo, a forma de apresentarem aos seus alunos a resolução do problema sobre Johannes Kepler que tinham lido na **Master Class** de **Terence Tao** sobre **O Pensamento Matemático**: tinham viajado transportados pela cena de Kepler a comprar vinho na capital da Áustria no século XVI.

Entretanto já tinham constatado que aqui já não usam o método do tempo de Kepler para medirem o vinho nos barris!



Caro leitor/a, vamos assistir à conversa:

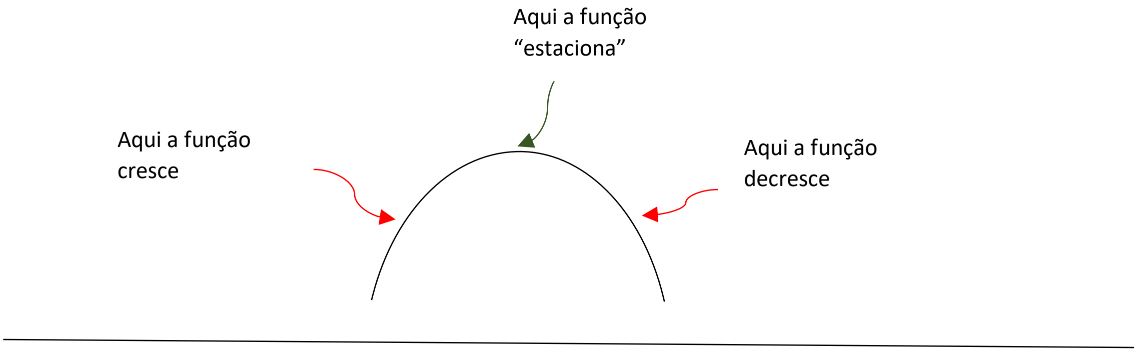
Professora Manuela: - Sabes, acho que temos que começar por lhes explicar que o que há que descobrir é a razão pela qual, se variarmos ligeiramente a altura e o diâmetro da base de um barril, a sua forma, portanto, mas mantendo o p fixo, o volume praticamente não se altera.

Professor Antunes: - Nem mais! Para isso pedimos-lhes para escreverem o volume como função da altura admitindo que p é constante. O que têm de escrever é isto, onde *V* é o volume, *a* é a altura do barril e *d* é o diâmetro da base do barril:

$V=\pi(\frac{d}{2})^2\times a$; mas como $(\frac{a}{2})^2+d^2=p^2$ é $V=\frac{\pi}{4}(p^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2)\times a$. Isto para eles é canja!

Professora Manuela: - E aproveitamos para lhes fazer notar que, ao olharmos para o gráfico de uma função contínua e "sem bicos", notamos que é nos postos do gráfico onde a tangente é horizontal que o seu valor como que "estaciona". Esses pontos correspondem a pontos do domínio da função de derivada nula.

Professor Antunes: - E por isso se chamam pontos de estacionaridade: onde a função estaciona, "descansa", para ir buscar uma imagem dinâmica às "montanhas russas"! Podemos fazer-lhes um esboço como este:



Neste nosso caso, para encontrar esses pontos resolvemos: $\frac{dV}{da} = \frac{\pi}{4}(p^2 - \frac{3}{4}a^2) = 0$

uma equação equivalente a $4p^2 = 3a^2$, donde $a^2 = 2d^2$.

E chegamos ao valor que nos interessa: $\boldsymbol{a = \sqrt{2}\, d}$, que dá a forma dos barris austríacos da altura.

Professora Manuela: - Como é que teriam chegado a esta proporção se ainda não conheciam o Cálculo Diferencial?! É espantoso! Seria a experiência através dos tempos, ou um resultado importado de uma civilização mais antiga?

Professor Antunes: - Boa pergunta, não sabemos**.** Mas o que parece é que, nos seus esforços para resolver este problema, Kepler desenvolveu alguns métodos de cálculo que o colocaram perto de ser ele o inventor do Cálculo Diferencial, o que teria poupado um grande trabalho ao grande Isaac Newton, mas também lhe teria retirado um pouco da sua aura gigante.

Professora Manuela: - Aos alunos mais interessados, e que tenham noções de Cálculo Diferencial, podemos falar numa outra abordagem, para lhes despertar a curiosidade e lhes rasgar horizontes, para lhes dar a conhecer uma forma de atacar o problema que é facilmente generalizável a funções não de duas, mas de mais variáveis.

E depois de uma pausa, a pensar …

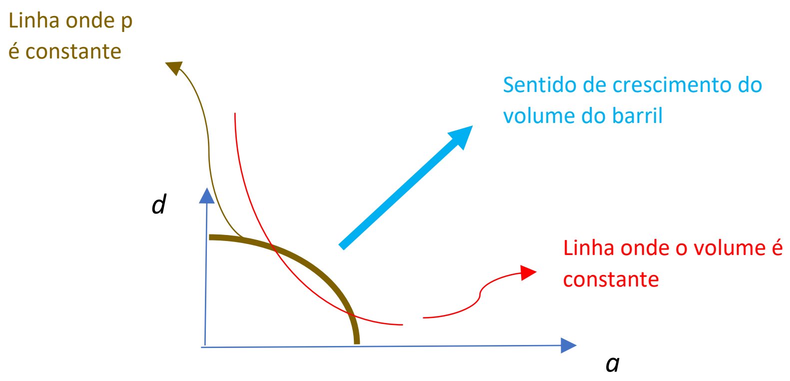
Podíamos, talvez, encorajá-los a olhar para este problema como a procura dos extremos, pois eles são pontos de estacionaridade, da função:

$$V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \times a \textit{ sobre a elipse de equação } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = p^2$$

Professor Antunes: - Estou a perceber a tua ideia… *e sorriu*. Não achas que seria um pouco puxado para eles?

Professora Manuela: - Nada disso, temos é de puxar por eles. Neste momento não podemos apresentar os resultados com todo o rigor, mas damos as ideias, a heurística.

Fazemos, com todo o cuidado, o esboço no plano deste sistema de coordenadas, onde *a* é a altura e *d* é o diâmetro da base de um barril e atribuímos a cada ponto do plano o volume desse barril:



Claro que eles vão perceber que, quando a linha vermelha se desloca no sentido da grande seta azul, o volume cresce, de forma que, e sobre a elipse, o volume é máximo no ponto onde as duas linhas são tangentes.

Nesse ponto, vetores perpendiculares à tangente comum são colineares, dependentes linearmente. Ora de entre esses vetores distinguem-se os gradientes do volume $V(a,d) = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \times a$ e de $y(a,d) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2$.

O que temos a fazer é, pois, procurar o ponto da elipse onde:

$$grad\ V = \lambda \times grad\ y \qquad \text{sendo } \lambda \text{ uma constante.}$$

No nosso caso é: $grad\ V = (\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2, \pi\frac{d}{2} \times a)$ e $grad\ y = (\frac{a}{2}, 2d)$, o que conduz às igualdades:

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \lambda\frac{a}{2} \qquad \text{e} \qquad \pi\frac{d}{2} \times a = \lambda \times 2d$$

de onde resulta: $\boldsymbol{a = \sqrt{2} \times d}$, a tal forma dos barris austríacos**.**

Professor Antunes: - Já agora vamos um pouco mais longe: dizemos-lhes que uma forma de exprimir, simultaneamente, a dependência linear dos gradientes num ponto e a pertença deste à elipse é escrever a função:

$$L(a,d,\lambda) = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \times a + \lambda \times [p^2 - (\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2)]$$

e igualar o seu gradiente a zero: $grad\ L = 0$

A igualização a zero das derivadas de *L* em ordem a *a* e a *d* dá a dependência linear dos gradientes; a igualização a zero da derivada de *L* em ordem a λ dá a pertença do ponto à elipse.

Em homenagem ao matemático francês, de origem italiana, **Joseph Louis Lagrange,** a este método, que é "facilmente" generalizável a funções de mais de duas variáveis, chama-se o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**.

Professora Manuela: - Ainda sobre a forma dos barris: será que esta era aquela para a qual, para o mesmo volume, o gasto de madeira é mínimo? Se for o caso, é caso para ficarmos perplexos com o nível de Pensamento Matemático, já nessa época. Vamos deixar-lhes esta interrogação como uma oportunidade para aplicarem este método.