

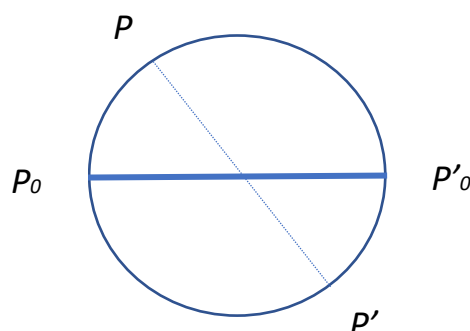
2020 outubro

Problema 6:

Resolução

Parte 1

Fixe um círculo máximo da esfera terrestre (*ver figura*) e um instante t e considere para cada ponto P sobre esse círculo máximo a diferença $d(P)$ entre as temperaturas em P e no ponto P' , diametralmente oposto, nesse instante t .



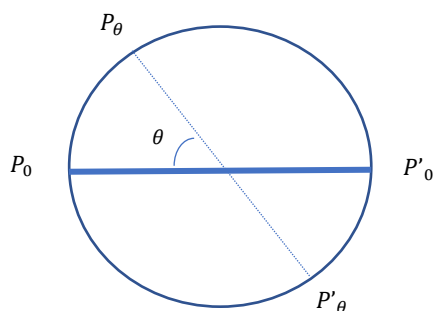
Fixando agora um ponto P_0 sobre o meridiano e designando por P'_0 o ponto diametralmente oposto, se imaginar P a deslocar-se de P_0 até P'_0 no sentido, por exemplo, dos ponteiros do relógio, d variará continuamente e passará do valor em P_0 ao valor em P'_0 que obviamente são simétricos.

Logo, para algum P , será $d(P) = 0$, pelo Teorema de Bolzano para funções contínuas definidas em conjuntos conexos (um arco de circunferência é um exemplo).

As temperaturas em P e P' serão iguais.

Nota

*Se quiser usar apenas o Teorema de Bolzano para funções reais de uma variável real consegue provar considerando, por exemplo, o ponto corrente P_θ sobre esse círculo máximo (*ver figura abaixo*), onde θ é o ângulo ao centro correspondente ao arco P_0P_θ , e aplicar o Teorema de Bolzano à função $d(P_\theta)$, definida em $[0, \pi]$, e, para cada θ , igual à diferença entre as temperaturas em P_θ e P'_θ o ponto oposto no mesmo diâmetro.*



E repetir o raciocínio...

Parte 2

Se imaginar dois pontos sobre a esfera terrestre, diametralmente opostos e a temperaturas diferentes, e considerar os círculos máximos que passam por esses dois pontos, em cada um deles existirá, como vimos, um par de pontos diametralmente opostos a temperaturas iguais.

Esses pontos são, obviamente, todos diferentes logo haverá, pelo menos, “tantos”¹ pares de pontos nessas condições como círculos máximos.

Mas há “tantos” círculos máximos como reais e “tantos” reais como os pontos de uma esfera logo o conjunto de pares de pontos opostos à mesma temperatura é infinito e tem a cardinalidade dos números reais! ... chamada a cardinalidade do contínuo.

Os inteiros não chegam para os enumerar...

¹ Com “tantos...como...” queremos referir que os conjuntos têm a mesma cardinalidade.