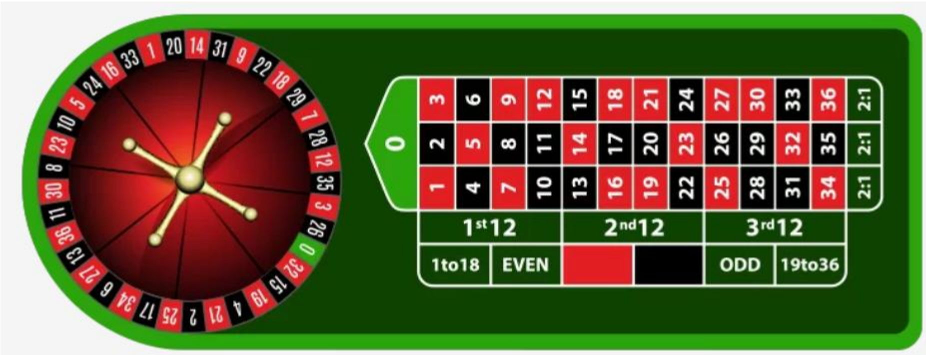
A distribuição binomial em contexto de jogo

Neste artigo falaremos de um jogo com componente aleatória, a ROLETA, e da sua aparição na obra do escritor russo Fiódor Dostoiévski (fica a sugestão de leitura para este Verão).



«Eu era um jogador: senti isso nesse preciso momento. Os meus braços e as minhas pernas tremiam, as minhas têmporas latejavam. Evidentemente, *era raro que numa dezena de lançamentos o zero saísse três veze*s; mas não havia nisso nada de particularmente espantoso. Eu próprio, no dia anterior, tinha visto o zero sair três vezes seguidas e, nessa ocasião, um dos jogadores, que havia anotado com cuidado os lançamentos numa folha de papel, disse em alta voz que, no dia anterior, esse mesmo zero não tinha saído mais do que uma vez em vinte e quatro horas.»

O Jogador, Fiódor Dostoiévski

Numa experiência aleatória, a probabilidade de sucesso é *p* e a de insucesso é 1-*p*. Vão realizar-se *n* experiências independentes. Pretende-se calcular a probabilidade de ocorrerem exactamente *k* sucessos. O modelo de probabilidade utilizado neste tipo de contexto é a binomial. A variável aleatória *X* representa o número de sucessos em *n* experiências.

X~*Binomial*(*n*,*p*)

$$P(X = k) = C_k^n \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Número de sequências possíveis

Probabilidade de se obter uma sequência específica

Voltando ao jogador de Dostoiévski, na roleta europeia, a probabilidade de sucesso é $p = \frac{1}{37}, n = 10$, $k = 3$ e $P(X = 3) = C_3^{10} \times \left(\frac{1}{37}\right)^3 \times \left(\frac{36}{37}\right)^7 \approx 0.002$.

Suponhamos que o texto era o seguinte: «(…) *numa dezena de lançamentos o zero saísse três vezes ou menos* (…)». Nesse caso, estaria em causa o cálculo de uma probabilidade cumulativa, isto é, a função distribuição: $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$. Trata-se de um cálculo fastidioso… No entanto, actualmente, a maioria das calculadoras efectuam o cálculo directamente.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$\approx 0.7606 + 0.211 + 0.0264 + 0.002 = 0.9999$$

Suponhamos agora que o jogador de Dostoiévski vai a uma casa de jogo onde se pode efectuar uma aposta com as seguintes premissas:

- p (probabilidade de sucesso) = 0.4;
- $1-p$ (probabilidade de insucesso) = 0.6;
- Sempre que se dá o insucesso, o jogador perde 1 euro;
- Sempre que se dá o sucesso, o jogador ganha 1 euro e 40 cêntimos.

O jogador já assumiu que vai realizar 20 jogadas nessa noite. Qual é a probabilidade de ganhar dinheiro nessa noite?

Em primeiro lugar, é preciso saber quantos sucessos s são necessários para haver lucro, ou seja, é necessário que $1.4s - (20-s) > 0 \Leftrightarrow s > 25/3 \approx 8.33$. O que significa que o jogador tem de conseguir pelo menos 9 sucessos.

Depois, é preciso aplicar a distribuição binomial, ou seja, sendo X o número de sucessos em 20 jogadas, $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) \approx 1 - 0.5956 = 0.4044$.