**Teoria de jogos – Alda Carvalho**

**Jogos de pilhas: o NIM camuflado**

No mês passado partimos do jogo do NIM e terminámos com uma variante chamada FIBONACCI NIM ([Outubro de 2021]). Neste texto continuaremos a falar sobre jogos de pilhas, desta vez mostrando como o NIM aparece muitas vezes de forma camuflada.

Relembrando rapidamente, o NIM é um jogo combinatório imparcial, uma vez que, em todos os momentos, as opções dos dois jogadores são as mesmas. Uma posição de NIM consiste num certo número de pilhas. Na sua vez, cada jogador deve retirar alguns feijões (ou todos) exactamente de uma das pilhas. Na versão normal, ganha o jogador que retirar o último feijão. Charles Leonard Bouton, num artigo clássico em 1902, apresentou uma *estratégia ganhadora*: efectua-se a soma sem transporte das representações binárias das dimensões das pilhas (soma NIM ou XOR); se a soma NIM resultar em zero, quem tiver de jogar perde, caso contrário, quem jogar ganha. Isso acontece porque qualquer jogada numa soma nula altera esse estado e, se a soma não for nula, é sempre possível encontrar uma jogada de forma a anular a soma novamente

O 3.º volume do *Winning Ways for Your Mathematical Plays* começa com a análise de um jogo chamado TURNING TURTLES, inventado por H. W. Lenstra.

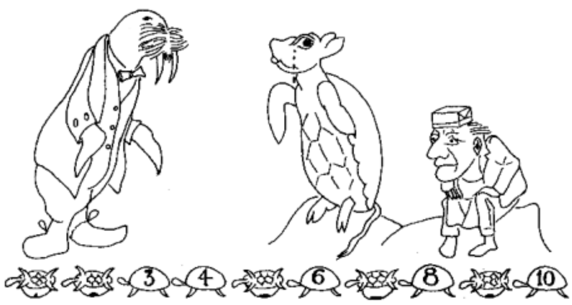
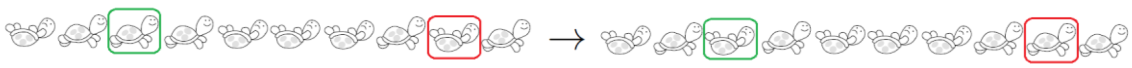


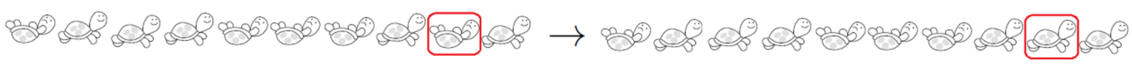

**Figure 1.** Playing Turning Turtles.

Uma posição deste jogo é uma linha de tartarugas. Uma tartaruga pode estar virada para cima ou virada para baixo. Por exemplo, na próxima figura está uma linha com 10 tartarugas dispostas aleatoriamente (viradas para cima ou viradas para baixo).

Uma jogada consiste em escolher uma tartaruga que está virada para cima e colocá-la de forma a ficar virada para baixo (está assinalada uma possibilidade a vermelho na imagem seguinte). Nessa mesma jogada, opcionalmente, pode virar qualquer uma das tartarugas (virada para cima ou virada para baixo), desde que esteja à esquerda da tartaruga virada anteriormente (está assinalada uma possibilidade a verde na imagem seguinte).

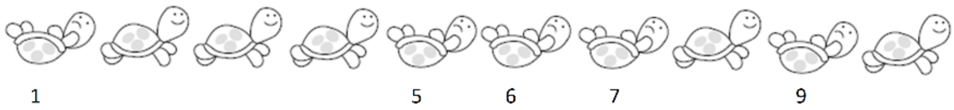


Note-se que a alteração da segunda tartaruga é opcional. A jogada seguinte também seria possível.



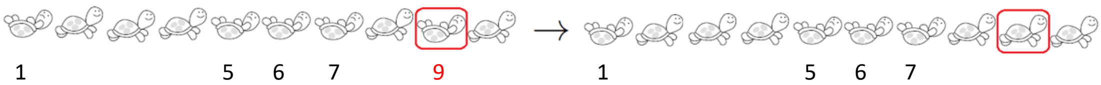
Uma vez que a eventual viragem de uma segunda tartaruga se dá à esquerda da primeira tartaruga, pelo que é garantido que o jogo termina após um número finito de jogadas. Quando uma tartaruga não tem tartarugas viradas para cima à sua direita, essa zona de tartarugas permanecerá imóvel no resto do jogo, tornando-se irrelevante (pode até ser removida).

Sendo assim, apenas interessa pensar nas posições das tartarugas que estão viradas para cima. No exemplo inicial, contando da esquerda para a direita, são as tartarugas 1, 5, 6, 7 e 9.




Vejamos como esta posição é análoga a uma soma disjunctiva de 5 pilhas NIM, com dimensões 1, 5, 6, 7 e 9. Nesta analogia é preciso perceber três tipos de jogadas.

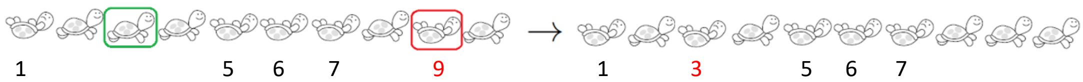
1) *Alterar apenas uma tartaruga que está virada para cima*; por exemplo, a que está na posição 9.




No NIM significa *remover todos os feijões da pilha escolhida*. Algebricamente, na posição exposta, isso corresponderia a

$$9 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 1 = 12 \rightarrow 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 1 = 5.$$

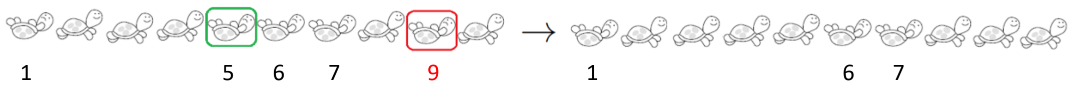
2) *Alterar uma tartaruga que está virada para cima e alterar outra tartaruga que está virada para baixo à sua esquerda*; por exemplo, as que estão nas posições 9 e 3.




No NIM significa *diminuir uma pilha de feijões* (com dimensão diferente das restantes). Algebricamente, na posição exposta, isso corresponderia a

$$9 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 1 = 12 \rightarrow 3 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 1 = 6.$$

3) *Alterar uma tartaruga que está virada para cima e alterar outra tartaruga que está virada para cima à sua esquerda*; por exemplo, as que estão nas posições 9 e 5.




Vista assim, no NIM, isso corresponderia à jogada ilegal *de tirar duas pilhas* (a pilha com 9 feijões e a pilha com 5 feijões) o que, algebricamente, corresponderia a

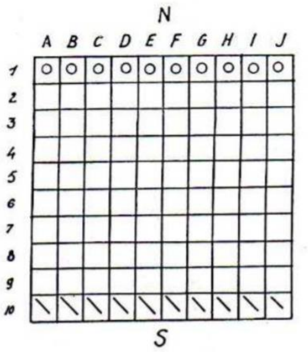
$$9 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 1 = 12 \rightarrow 7 \oplus 6 \oplus 1 = 0.$$

No entanto, retirar as pilhas com 9 e 5 feijões (transformando $9 \oplus 5$ em 0) ou transformar a pilha com 9 feijões numa pilha com 5 feijões (transformando $9 \oplus 5$ em $5 \oplus 5$ ) resulta exactamente no mesmo, uma vez que $5 \oplus 5 = 0$ . No NIM, a segunda possibilidade já seria legal. Algebricamente, isso corresponderia a

$$9 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 1 = 12 \rightarrow 5 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 1 = 0.$$

Sendo assim, embora a «logística» das jogadas seja ligeiramente diferente, algebricamente o TURNING TURTLES é análogo ao NIM. Se quisermos traduzir o TURNING TURTLES como um jogo de pilhas isomorfo, as regras teriam de ser algo assim: uma posição consiste num certo número de *pilhas com dimensões diferentes* (não há mais do que uma tartaruga virada para cima numa determinada posição). Na sua vez, cada jogador pode fazer um de *dois tipos de jogada*; (1) retirar alguns feijões (ou todos) exactamente de uma das pilhas desde que as pilhas permaneçam todas com dimensões diferentes; (2) retirar duas pilhas inteiras. Acontece que, pensando na soma NIM, tirar duas pilhas inteiras ou igualar duas pilhas vai dar ao mesmo. Substituindo o segundo tipo de jogada pela possibilidade de igualar duas pilhas, obtém-se o NIM, ficando explicada a completa correspondência entre os jogos. De alguma forma, o TURNING TURTLES elimina automaticamente pares de pilhas iguais, dada a impossibilidade de duas tartarugas ocuparem a mesma posição.

Em 1955, Charles Béart, numa importante referência sobre jogos africanos, descreve um jogo de tabuleiro praticado na Costa do Marfim, o TIOUK-TIOUK. É jogado com pequenos paus e pedras num tabuleiro rectangular desenhado na areia. As dimensões do tabuleiro são variáveis. Na posição inicial, cada jogador começa com uma linha de peças, como se ilustra na figura seguinte.




Há uma peça de cada jogador em cada coluna. Cada jogador pode mover uma peça sua para uma casa vazia da mesma coluna, desde que não salte por cima da peça adversária. O objectivo é imobilizar o adversário: o primeiro a não conseguir jogar perde.

Trata-se de um jogo cíclico, uma vez que é permitido aos jogadores retroceder com as suas peças. Se os jogadores jogarem de determinada maneira (para trás e para a frente), o jogo pode nunca acabar (daí a palavra «cíclico»). No entanto, analisando com cuidado, se um jogador retroceder uma peça um certo número de quadrados, o adversário pode avançar a sua peça essa mesma quantidade, encurralando cada vez mais o adversário, sem que as suas perspectivas piorem. Devido a isso, uma estratégia ganhadora não envolve movimentos para trás. Isto justifica que uma estratégia ganhadora do TIOUK-TIOUK pode ser obtida conhecendo a estratégia ganhadora do NIM. Se movimentos para trás não fossem permitidos, uma coluna com duas peças à distância de $k$ quadrados actuaria exactamente como uma pilha NIM com $k$ feijões. Sendo assim, sem movimentos para trás, o TIOUK-TIOUK *é* o jogo do NIM; cada coluna corresponde a uma pilha de feijões.

A análise deste jogo está no *Winning Ways for Your Mathematical Plays* mas os autores chamam NORTHCOTT a uma versão horizontal do TIOUK-TIOUK. Os autores afirmaram que inventaram o NORTHCOTT desconhecendo a existência do TIOUK-TIOUK. O jogo é tão natural que foi inventado de forma independente por pessoas diferentes.

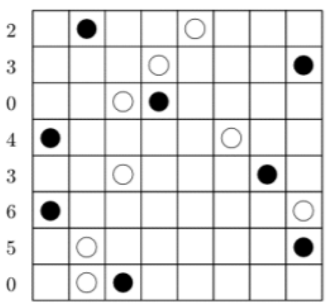
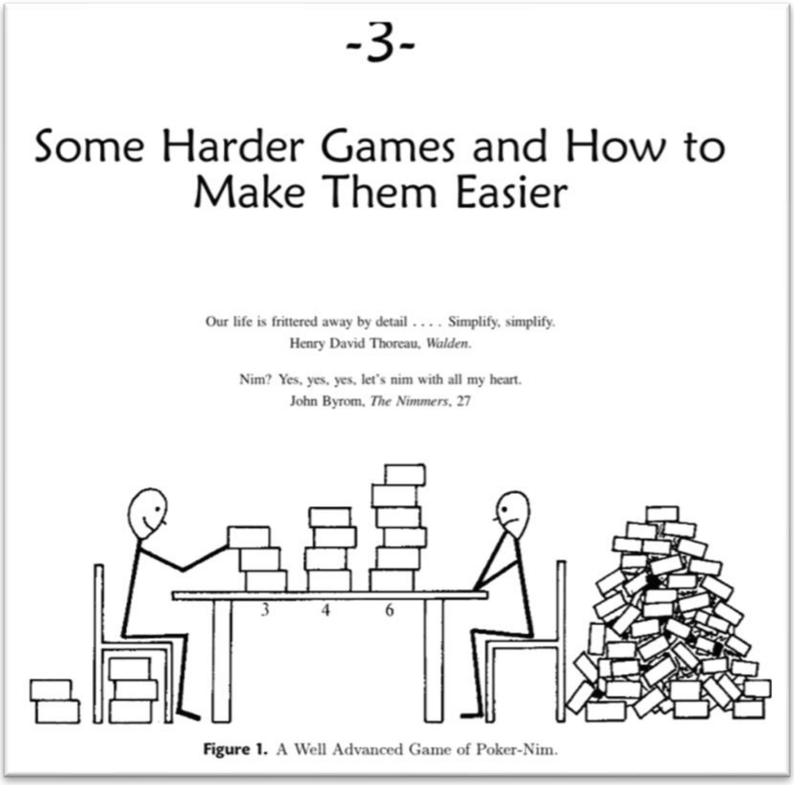



**Figure 2.** A Position in Northcott's Game.

Um outro jogo com a mesma dinâmica do TIOUK-TIOUK, chamado POKER NIM, é mencionado no 3.º capítulo do volume 1 do mesmo livro. Nesta variante do NIM, cada jogador guarda consigo os feijões que for removendo ao longo do jogo e há uma jogada legal extra que consiste em usar alguns desses feijões (ou todos), acrescentando-os a uma das pilhas da mesa. Mais uma vez, estas jogadas são irrelevantes, uma vez que podem ser imediatamente eliminadas pelo adversário, até que se esgote o arsenal.


-3-

Some Harder Games and How to Make Them Easier

Our life is frittered away by detail . . . . Simplify, simplify.
Henry David Thoreau, *Walden*.

Nim? Yes, yes, yes, let's nim with all my heart.
John Byrom, *The Nimmers*, 27



**Figure 1.** A Well Advanced Game of Poker-Nim.