O jogo PONTOS E QUADRADOS e a fórmula de Euler

No mês passado (Janeiro de 2022) falámos no PONTOS E QUADRADOS, um jogo que alguns se podem lembrar de jogar nos seus tempos de juventude. Este jogo já fez parte de várias edições do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos. O livro de Elwyn Berlekamp, *DOTS-AND-BOXES: Sophisticated Child's Play*, 2000, é uma referência fundamental. Neste texto mostraremos uma relação surpreendente deste jogo com a bem conhecida Fórmula de Euler para grafos planares. Esta relação revelar-se-á bastante útil na prática deste jogo.

Relembrando rapidamente as regras, o PONTOS E QUADRADOS é praticado num pontilhado quadriculado. Alternadamente, cada jogador une dois pontos vizinhos com um segmento horizontal ou vertical. Quando um dos jogadores completa um quadrado, escreve a sua inicial no seu interior e joga outra vez. Sempre que um jogador dispuser de uma jogada que fecha um quadrado, não é obrigado a fazê-lo. O objectivo é obter o maior número de quadrados com o seu nome.

No texto do mês passado vimos como há um certo tipo de jogada que assumem um papel decisivo: as jogadas de captura dupla (*doublecrossed move*). Também vimos como uma estratégia neste jogo passa por controlar as cadeias longas, nenhum jogador quer abrir uma cadeia longa, uma vez que isso dá uma escolha vital ao adversário. Uma cadeia longa é uma configuração em que qualquer jogada permite ao adversário escolher entre permitir ou não permitir capturas duplas para manter o controle do jogo.

O jogo PONTOS E QUADRADOS tem uma relação surpreendente com a bem conhecida Fórmula de Euler para grafos planares. Essa fórmula relaciona o número de arestas (A), número de vértices (V) e número de faces (F) e é dada por

A = F + V - 1 (não contando com a face infinita).

Uma interessante análise dessa fórmula pode ser vista neste link.

No caso do PONTOS E QUADRADOS, vamos usar a letra Q para o número de quadrados e a letra P para o número de pontos. Com esta notação, a Fórmula de Euler traduz-se em

A = Q + P - 1.

Pensemos agora no número de jogadas (J) de um típico jogo de PONTOS E QUADRADOS. Um pensamento superficial aponta para

J = A,

uma vez que uma jogada acontece quando se traça uma aresta. No entanto, este pensamento não é certeiro, uma vez que quando se fecham quadrados, fazem-se novas arestas sem que a jogada passe para o adversário (por exemplo, se um jogador traçar três arestas de seguida, fechando dois quadrados, as três arestas correspondem a uma jogada única).

Sendo assim, uma fórmula mais adequada parece ser

J = A - Q.

Apesar da melhoria, a fórmula ainda não é certeira: depois de se fechar o último quadrado, não se continua a jogar! Naturalmente, o problema do último quadrado pode ser resolvido facilmente alterando a fórmula para

J = A - Q + 1.

Mas, ainda há um último problema que resiste; a possibilidade de uma jogada de captura dupla. Quando se realiza uma jogada de captura dupla, fecham-se dois quadrados ao mesmo tempo. Não se devem descontar ambos os quadrados, mas sim apenas um (o fecho de dois quadrados faz com que se jogue mais uma vez; não faz com que se jogue mais duas vezes). A fórmula certeira é

$$\mathbf{J = A - Q + 1 + D}$$

em que D é o número de jogada de captura dupla realizadas no jogo.

Temos então duas fórmulas:

A = Q + P - 1 (Fórmula de Euler)

A = J + Q - 1 - D (Fórmula baseada no número de jogadas realizadas)

Igualando, tem-se

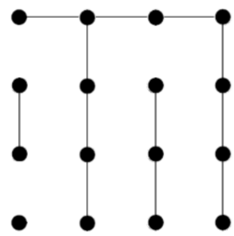
P = J - D, ou seja, **J = P + D**.

Uma vez que, na maioria dos jogos, o número de jogadas de captura dupla excede o número de cadeias longas em uma unidade (a última cadeia longa é usada totalmente, já não sendo necessária a realização de uma jogada de captura dupla para manter o controle), tem-se a fórmula fundamental do PONTOS E QUADRADOS:

$$\mathbf{J = P + C - 1}.$$

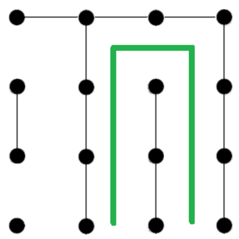
Vejamos agora a grande utilidade desta fórmula. Numa grande maioria dos casos (sobretudo em tabuleiros razoavelmente grandes), quem faz a última jogada ganha, uma vez que é quem mantém o controle durante o jogo, fechando sequencialmente as cadeias longas até à última. Portanto, tendencialmente, o primeiro jogador quer que o jogo dure um número ímpar de jogadas e o segundo jogador quer que o jogo dure um número par de jogadas. Ou seja*, o primeiro jogador quer que C tenha a mesma paridade que o número de pontos do tabuleiro e o segundo jogador quer que C tenha a paridade oposta*.

Observe-se o seguinte exemplo (Berlekamp, 2000, página 13).



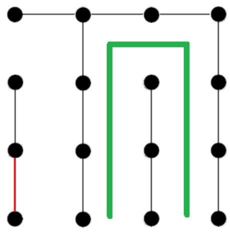
12

Foram realizadas 12 jogadas até ao momento, logo é a vez do primeiro jogador. O tabuleiro tem 16 pontos, portanto P é par. Sendo assim, o primeiro jogador quer que C seja par e o segundo quer que C seja ímpar. Neste momento, há uma cadeia longa já estabelecida, como se indica a verde na figura seguinte.



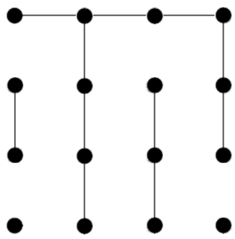
12

Consequentemente, ao jogar, o primeiro jogador pretende criar uma segunda. Pode fazer isso, por exemplo, com a seguinte jogada (assinalada a vermelho).



12

Para terminar fica um desafio. Na jogada imediatamente anterior, o segundo jogador tinha feito um erro. Como deveria ter jogado para manter C ímpar?



11