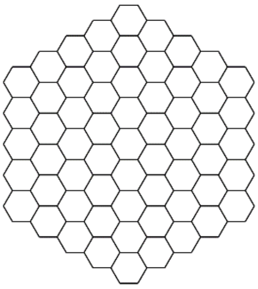
Revisitando o PRODUTO

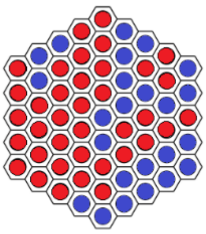
Começo este texto com uma excelente novidade, o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (organização conjunta de Ciência Viva, Associação Ludus, APM e SPM, http://ludicum.org/cnjm) está de volta no próximo ano lectivo. Para quem não conhece, este evento realiza-se anualmente em Portugal desde 2004 e envolve centenas de escolas e dezenas de milhar de alunos do Ensino Básico e Secundário. Na final nacional, os representantes de cada escola defrontam-se para a determinar os campeões nacionais. A 16.ª edição será no dia 24 de Março de 2023, em Aveiro. Será com certeza mais um excelente dia de festa, com centenas de alunos concentrados a pensar e a tomar decisões nos seus jogos – sem tecnologia, sem barulho, apenas uma boa proposta de jogos matemáticos.

Neste texto vamos voltar ao PRODUTO, um jogo que é uma das seis propostas do campeonato do próximo ano lectivo. Vamos voltar aos desafios deixados num texto anterior (Fevereiro de 2021). O PRODUTO é jogado num tabuleiro com células hexagonais (5 de lado), como se mostra na figura seguinte. Para além do tabuleiro, são necessárias peças de duas cores (≅ 50 de cada).

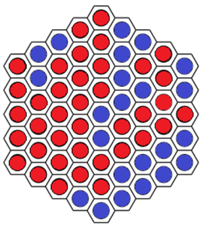


O tabuleiro começa vazio e, antes de começar, define-se a cor de cada jogador (por exemplo, azul e vermelho). Esta questão é importante pois, ao contrário da maioria dos jogos, em qualquer jogada é possível escolher a cor das peças jogadas. Trata-se de uma característica fora do comum, trazendo uma dinâmica pouco usual neste este tipo de jogos. Começa o jogador das peças azuis que, na primeira jogada, coloca só uma peça no tabuleiro (pode ser uma peça azul ou vermelha). No resto do jogo, alternadamente, cada jogador coloca sempre duas peças no tabuleiro (duas azuis, duas vermelhas ou uma de cada).

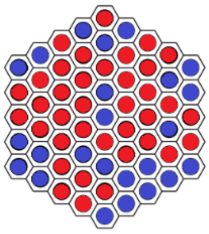
O tabuleiro vai sendo preenchido e vão-se formando *grupos de peças conexas da mesma cor*. Ganha o jogo quem conseguir fazer o *maior produto* com os dois maiores grupos de peças da sua cor. Uma vez que o tabuleiro tem 61 casas, fica completamente preenchido na 16.ª jogada do primeiro jogador. Se não acontecer antes por abandono de um dos jogadores, a posição final determina o vencedor do jogo. Vejamos três exemplos de posições terminais.



Posição 1



Posição 2



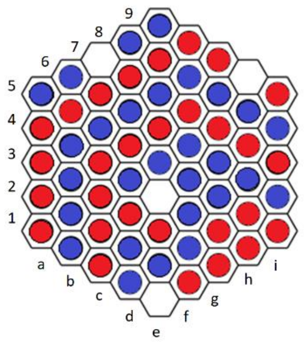
Posição 3

Na primeira posição, existem três grupos azuis (11, 10 e 3 peças) e existem dois grupos vermelhos (34 e 3 peças). Sendo assim, trata-se de uma vitória do primeiro jogador pois 11x10=110>102=34x3.

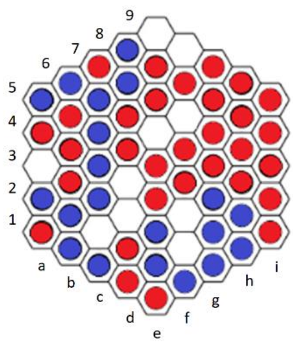
Na segunda posição, existem quatro grupos azuis (10, 8, 3 e 2 peças) e existe um grupo vermelho (38 peças). Sendo assim, trata-se de uma vitória do primeiro jogador pois 10x8=80>0=38x0. Provavelmente, esta posição final resulta de um jogo onde a estratégia azul foi claramente impedir a formação do segundo grupo vermelho.

Na terceira posição, existem sete grupos azuis (9, 4, 3, 3, 2, 2 e 1 peça) e existem dois grupos vermelhos (36 e 1 peça). Neste exemplo, o produto é igual, 9x4=36=36x1, sendo necessário uma regra extra para decidir estes casos. Ganha o jogador que tiver menos peças da sua cor na posição final, o que está garantido pois o tabuleiro tem um número ímpar de casas. Sendo assim, como existem 24 peças azuis e 37 peças vermelhas, é novamente vitória do primeiro jogador.

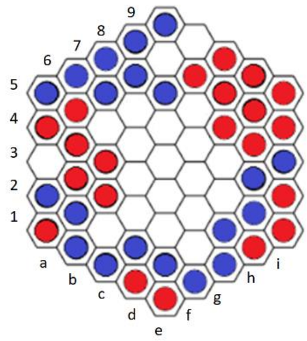
Os desafios deixados anteriormente podem ser vistos na imagem seguinte.



Posição 4
Vermelhas jogam e ganham



Posição 5
Azuis jogam e ganham



Posição 6
Vermelhas jogam e ganham

Na quarta posição, existem quatro grupos azuis (13, 11, 2 e 2 peças) e existem quatro grupos vermelhos (12, 10, 6 e 1 peça). Neste momento, usando os maiores grupos de cada um dos jogadores, as azuis têm vantagem (13×11=143) sobre as vermelhas (12×10=120). Sendo as vermelhas a jogar, é importante perceber o que será mais vantajoso, aumentar o seu maior grupo ou o segundo maior? No PRODUTO, quanto mais equilibrados foram os dois grupos, melhor será o produto. No entanto, é importante ver as implicações das nossas escolhas nos grupos do adversário. Nesta posição, as vermelhas podem alcançar o 13×12=156 de duas formas: (i) jogando duas peças vermelhas nas casas c8 e h9; (ii) jogando uma vermelha na casa c8 e outra na casa e4. A segunda opção é obrigatória, uma vez que na outra opção as azuis conseguem aumentar um dos seus grupos. Na opção (i) as azuis ganham o jogo com 15×11=165, mas na opção (ii) as azuis não conseguem jogar em e4 e "gastam" uma das suas peças em c7. Esta peça não contribuiu para o produto, e as vermelhas ganham com 165 contra 14×11=154 das azuis.

Na quinta posição, há o risco iminente de as vermelhas jogarem uma peça azul em d3 fazendo com que só exista um grupo azul. O produto n×0=0 ou n×1=n não é nada bom para as azuis. Sendo assim, as azuis ganham jogando uma peça vermelha em c3 e uma peça azul em a3. Esta peça azul tem dois propósitos, impedir que o segundo grupo vermelho aumente (replicar um grupo grande é muito vantajoso). Uma outra ideia chave deste jogo é escolher bem o multiplicando. Do ponto de vista das vermelhas, é muito mais vantajoso repetir o seu maior grupo. Jogando em a3, as azuis não só impedem este facto como aumentam um dos seus maiores grupos.

Na sexta posição, as vermelhas já garantiram dois grupos. No entanto, as azuis correm o risco de terminar com um único grupo, resultando daí um produto nulo. Mesmo que o produto do adversário seja 1×n=n, qualquer coisa é melhor que zero! Sendo assim, as vermelhas devem jogar com este objectivo. Nesta posição, se as vermelhas jogarem duas peças azuis em e3 e e5, por ser um tabuleiro hexagonal, a conexão está assegurada e as vermelhas ganham o jogo. Isto acontece porque as azuis não conseguem impedir a conexão nos dois lados. Dada a configuração hexagonal, consegue-se contornar pelo outro lado. Este tipo de estratégia, fazer uma «ponte» é um dos primeiros raciocínios num outro jogo bastante conhecido, o HEX. Este jogo também já fez parte do campeonato nacional de jogos matemáticos e falaremos nele no próximo mês.