A VACA DAS 8 PATAS E OS DIAGRAMAS DE VENN

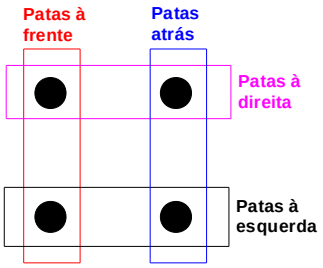
HÉLDER PINTO (I. PIAGET, RECI E CIDMA)

Contar parece que é uma coisa natural e fácil mas nem sempre é assim… Veja-se a seguinte anedota…

Quantas patas tem uma vaca?

Oito: 2 à frente, 2 atrás, 2 do lado direito e 2 do lado esquerdo.

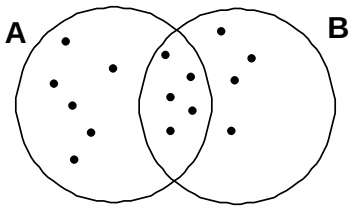
De facto, este exemplo é muito ingénuo e toda a gente percebe onde está o erro: cada pata da vaca está a ser contabilizada duas vezes (uma vez quando se indica esquerda/direita e outra quando se refere à frente/atrás). Num diagrama de Venn (como gostam os matemáticos de complicar o que é simples…), olhando a vaca de cima, teríamos o seguinte:



Este é então um exemplo muito simples dos cuidados que temos de ter quando estamos a fazer contagens do número de elementos de conjuntos, em particular, quando se trata da reunião de conjuntos (que é o caso desta situação das patas da vaca): é sempre necessário ter muito cuidado com os elementos que são contados «mais do que uma vez»…

Vejamos então como determinar o cardinal (*n* - o número de elementos do conjunto) da reunião de conjuntos.

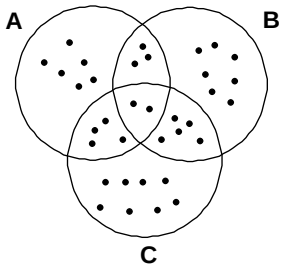
No caso de dois conjuntos tem-se a seguinte fórmula: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. No exemplo da figura a seguir, fica $n(A \cup B) = 11 + 9 - 5 = 15$. Repare-se que existem 5 elementos que são contabilizados duas vezes (uma por A e outra por B) e, por isso, devem ser retirados («subtraídos») quando somamos os cardinais dos dois conjuntos.



Com três conjuntos a situação é um pouco mais complicada pois, em certas situações, podemos estar a contar certos elementos até três vezes repetidamente… Assim, tem-se a seguinte fórmula:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

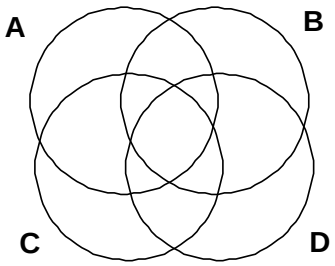
No fundo estamos a retirar as interseções duas a duas (que são contadas duas vezes); mas pode-se estar a retirar «demais» e temos de voltar a colocar o que se retirou indevidamente… Observe-se o exemplo a seguir:



$$n(A \cup B \cup C) = 15 + 17 + 19 - 5 - 7 - 6 + 2 = 35.$$

(conte os pontos e vai reparar que a fórmula funcionou)

Com quatro conjuntos é ainda mais complexo, mas o princípio é sempre o mesmo: «somar, subtrair, somar, subtrair,…». Na imagem abaixo repare como um diagrama de Venn de quatro conjuntos, bem como a sua fórmula de contagem, podem ser já bem «intrincados»…



$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) \\ &- n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) \\ &+ n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Felizmente, para calcular o número de patas da vaca não precisamos da fórmula acima completa, pois as patas da frente não se intersetam com as de trás, nem as da esquerda com as da direita… Assim, o número de patas da vaca é dado por (F-frente; A-atrás; E-esquerda; D-direita; note-se ainda que as interseções assinaladas a cor são vazias):

$$\begin{aligned} n(F \cup A \cup E \cup D) \\ &= n(F) + n(A) + n(E) + n(D) - n(F \cap A) - n(F \cap E) - n(F \cap D) \\ &- n(A \cap E) - n(A \cap D) - n(E \cap D) + n(F \cap A \cap E) + n(F \cap A \cap D) \\ &+ n(A \cap E \cap D) + n(F \cap E \cap D) - n(F \cap A \cap E \cap D) \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 4 \end{aligned}$$

Ufa, que alívio!!!! A fórmula é capaz de contar corretamente as patas de uma vaca e «corrigir» a anedota!!!!

Claro que este exemplo é trivial e não era preciso matemática formal para isto; apenas se trouxe este exemplo para mostrar que contar nem sempre é fácil e que, numa situação que não nos seja intuitiva, temos de confiar que alguém demonstrou com rigor as fórmulas matemáticas que utilizamos e que estas funcionam sempre! Mesmo que seja só para contar o número de patas de uma vaca…