

2022 Janeiro

deltaKappa A Alice e o Eduardo resolvem o Problema Natalício

Já tinham passado as Festas Natalícias quando os nossos amigos se reencontraram no habitual **Épsilon Delta Café**, agora já sem as decorações festivas. A Alice e o Eduardo estavam muito empolgados: iam apresentar a resolução a que tinham chegado, depois de aturado debate mental, para o problema que tinha ficado pendente na reunião de Dezembro (pode conhecer [aqui](#)). Vamos assistir ...



Professora Manuela (PM) (*dirigindo-se à Alice e ao Eduardo*): - Então parece vocês conseguiram contar de quantas maneiras diferentes é que nós conseguimos entregar os presentes a nós próprios no caso em que cada um entrega um presente, cada um recebe um presente e ninguém recebe presente de si próprio!

Alice (A) (*depois de uma dentada num pastel de nata*): - É verdade, resolvemos o problema, e não só para o caso de cinco pessoas, mas para o caso geral de N pessoas. Eduardo queres começar pelos casos mais simples?

Eduardo (E): - Como a Professora nos tem sugerido começamos por, recorrendo à abstração, formular o problema com a maior generalidade. Neste caso, e imaginando N professores nas posições 1, 2, 3, ..., N , trata-se de colocar os N presentes, p_1, p_2, \dots, p_N , (onde p_i é o presente do professor na posição i) nessas N posições de forma que nenhum fique nas mãos de quem o oferece, ou seja, na posição inicial.

E começámos pelos casos mais simples com a esperança de os poder usar como “building blocks” (*e esta hem!? ...*) para a resolução dos casos mais complicados, uma sugestão da nossa querida Professora. Resolvemos designar o número que procuramos, no caso de N pessoas, por $\rho(N)$.

No caso de duas ou três pessoas é fácil de contar: $\rho(2) = 1$ e $\rho(3) = 2$.

E agora a Alice vai explicar como pensámos no caso de $N = 4$.

A: - Nesse caso notamos que p_1 podia ser entregue em $4-1 = 3$ posições diferentes.

Suponhamos que era entregue na posição $i = 2, 3$, ou 4 . Neste caso há duas possibilidades:

- Há uma troca de posições, ou seja, p_i é entregue na posição 1 e neste caso os restantes dois presentes devem ser trocados entre si de forma que nenhum fique no mesmo lugar o que pode acontecer de $\rho(2)$ formas diferentes;

- p_i é entregue provisoriamente na posição 1, mas não fica nessa posição: neste caso, depois de colocar p_i na posição 1 todos os que não estão na posição i trocam de posições entre si de modo que nenhum fique no mesmo lugar, o que pode acontecer de $\rho(3)$ formas diferentes.

Agora podemos calcular $\rho(4)$ à custa de $\rho(2)$ e $\rho(3)$: $\rho(4) = 3 \times (\rho(2) + \rho(3))$

E: - É óbvio que um raciocínio análogo pode ser feito para o caso de N pessoas e N presentes. Neste caso chegamos à seguinte fórmula: $\rho(N) = (N - 1) \times (\rho(N - 2) + \rho(N - 1))$

Chama-se, como a Professora costuma chamar nas aulas, uma fórmula de recorrência pois podemos obter o valor de ρ para N à custa dos valores para N-2 e N-1.

Professor Ernesto (PE): - Se experimentarem calcular o quociente $\frac{\rho(N+1)}{\rho(N)}$ vão ver que não é constante como acontece quando o crescimento é exponencial. Este quociente tende para infinito! O crescimento do covid, de roda livre sem medidas de contenção à propagação, seria ridículo comparado com este!

Professor Antunes (PA) (*dirigindo-se aos dois jovens*): - Será que vocês são capazes de, nuns minutos, redigirem um programa para calcular estes valores?

A Alice e o Eduardo não se fizeram rogados: ligaram o Tablet, abriram o editor de JustBasic e meteram-se ao trabalho. Vinte minutos depois a Alice estava contente.

A: - Ora aqui está, conseguimos isto:

```
[Start]
INPUT "Qual o número N de presentes a entregar? "; N
if N=0 then
end
end if
if N < 4 then
print "Para N = 2 ou 3 o número de presentes é 1 ou 2"
Goto [Start]
end if
if N > 3 then
dim num(N)
num(2)= 1
num(3)= 2
for i = 4 to N
num(i) = (i-1)*(num(i-2) + num(i-1))
next i
print "O número de formas diferentes de fazer "; N; " entregas é: "; num(N)
end if
Goto [Start]
```

E: - Para cinco presentes obtivemos este resultado: O número de formas diferentes de fazer 5 entregas é: 44

PE: - Então vejam lá de quantas formas pode ser feita a entrega se houver, 10, 20, 30 e 100 presentes?

A Alice correu o programa e não se conteve de espanto quando viu o resultado...

O número de formas diferentes de fazer 10 entregas é: 1334961

O número de formas diferentes de fazer 20 entregas é: 895014631192902121

O número de formas diferentes de fazer 30 entregas é: 97581073836835777732377428235481

O número de formas diferentes de fazer 100 entregas é:

34332795984163804765195977526776142032365783805375784983543400282685180793327632432791
396429850988990237345920155783984828001486412574060553756854137069878601

O Eduardo não se conteve:

E: - Caramba, se o Covid crescesse assim ao fim de 100 ciclos contaminava todos os átomos do universo!

PE: - Pois então agora é que eu vos vou contar como é que Hiparco calculou, de forma muito mais precisa do que Aristarco, a distância da Terra à Lua. Vão ficar fascinados pelo genial engenho do seu cálculo ...

PA: - Calma, Caaalma Ernesto! ... por hoje chega, contas na nossa próxima reunião daqui a um mês...