2022 Fevereiro

deltaKappa **Euler e a Quantidade de Primos**

Prémios e castigos são a mais baixa forma de educação - Zhuangzi

A Alice, o Leonardo e o Eduardo não paravam de insistir com a Professora Manuela para a convencer a levar o Professor Ernesto à Escola para lhes contar a demonstração de Euler para a existência de infinitos números primos, uma prova que ele vislumbrou 2000 anos depois da de Euclides.

Tinham ficado muito intrigados, 2000 anos, tanto tempo! O Homem devia ser um Génio!

Até que o Professor Ernesto resolveu encontrar-se com eles num local inspirador, o Café dos Jardins da Gulbenkian, e adotar uma abordagem diferente: decidiu prepará-los para serem eles a fazer uma apresentação aos colegas. E ele interviria no fim para dar o toque final de Euler.

Vamos então assistir à conversa:

Professor Ernesto: - Esta prova constrói-se com base em três peças básicas e … com muita argúcia.

Eu vou explicar-vos cada uma dessas peças e cada um vai apresentar uma delas.

Para a Alice reservo a peça mais Maravilhosa: vais dar a conhecer aos teus colegas os blocos com os quais se constroem os inteiros positivos, e que não são mais do que os números primos.

Peça 1: Trata-se de um importantíssimo resultado já exposto, cerca de 300 anos antes de Cristo, no Livro XII de **Os Elementos** de ***Euclides*** e demonstrado em 1796 pelo enorme **Carl Friedrich Gauss**. O…

Teorema Fundamental da Aritmética*:*

Todo o inteiro superior a 1 se pode escrever como um produto de fatores primos. E de forma única, a menos da comutação dos fatores: se escrevermos os fatores primos por ordem crescente essa escrita é única.

Podes dar-lhes este exemplo: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Alice*:* - E vou dar uma vista de olhos na demonstração para encontrar forma de lhes dar uma ideia da prova.

Professor Ernesto: - E da prova podes extrair um algoritmo para obter a decomposição de um inteiro em fatores primos e pões os teus colegas a aplicá-lo para aquecerem os motores!

Para o Eduardo reservo a…

Peça 2*:* Trata-se da soma $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n}$ com uma infinidade de parcelas.

Eles sabem que $1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n}$ é igual a $\frac{1-\frac{1}{p^{N+1}}}{1-\frac{1}{p}}$ pois trata-se de uma progressão geométrica.

Ora quando $N \to \infty$, $\frac{1}{p^{N+1}} \to 0$ e é decrescente, logo a soma, sempre crescendo, vai-se aproximando de $\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ por valores inferiores e as distâncias tornam-se arbitrariamente pequenas.

Daí ser natural tomar este valor para $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^n}$, expressão que tem o nome de série geométrica de razão $\frac{1}{p}$. A soma deste número infinito de parcelas é finita, portanto.

E para o Leonardo a fica a …

Peça 3*:* **Trata-se da** soma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ designada por **Série Harmónica** por referência a Pitágoras e aos seus sons harmónicos.

Acontece que se nela introduzirmos parênteses desta forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2^3})+\cdots+(\frac{1}{2^{N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^N})+\cdots$$

notamos o seguinte:

a. O valor dos parênteses é sempre superior a $\frac{1}{2}$, pois sendo a menor das parcelas $\frac{1}{2^N}$ o número de parcelas no parêntese é 2^{N-1}: notem que $2^N = 2^{N-1}+2^{N-1}$;
b. Posso acrescentar sempre mais um parenteses.

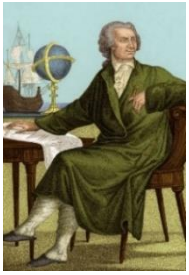
Ora isto significa que as somas $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}$ se tornam arbitrariamente grandes quando *N* cresce para infinito.

O valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ não é, portanto, finito.

Esta prova tinha sido feita no século XIV pelo matemático, filósofo e bispo normando **Nicole Oresme**.

Professor Ernesto (*dirigindo-se ao Leonardo*): - Depois de explicares isto entro eu para dar o toque final de Euler.

Sublinho que se trata de três peças desgarradas, vindas de épocas e áreas diferentes, quais melodias saídas de setores diferentes de uma orquestra, que, de repente, sugerem a um maestro genial uma prova inovadora e magistral.



Leonhard Euler

Orquestra Gulbenkian

Então qual foi a ideia genial de **Leonhard Euler**?

Nem mais nem menos do que notar que podia obter os termos da série harmónica multiplicando as séries dos inversos das potências dos números primos! Como vocês vão ver…

Tal como Euclides, recorreu ao Método de Redução ao Absurdo e supôs que havia um número finito P de números primos.

Associou a cada primo p a série geométrica de razão $\frac{1}{p}$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^n} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots$

E teve a ideia audaciosa de multiplicar as P séries!

Para multiplicar as séries o que há a fazer é escolher, de todas as formas possíveis, uma parcela em cada uma das séries, multiplicá-las e depois adicionar os resultados.

Alice (*perplexa*): - Mas há uma infinidade de formas diferentes de fazer essas escolhas!

Professor Ernesto (*gratificado e entusiasmado com a atenção inteligente da Alice*): - Claro que há, pois, as séries têm infinitas parcelas.

Mas repara na forma arguta como Euler tratou esta soma de produtos de parcelas: notou que escolhida uma parcela em cada uma das P séries o seu produto é um valor da forma $\frac{1}{N}$, onde os produtos das potências no denominador constituem a decomposição de *N* em fatores primos.

Logo, se alterasse a escolha, mesmo de uma só das parcelas, obtinha um *N* diferente pois, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, a Peça 1 da Alice, a escrita de um inteiro como produto de fatores primos é única.

E notou que desta forma ia obter todos os números da forma $\frac{1}{N}$: dado *N,* decompunha em fatores primos*,* ou seja*,* escrevia $N = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$, e para cada um dos $p_i's$, com *i* de *1* a *k,* escolhia, na série associada, a parcela correspondente a α_i , e nas restantes séries, correspondentes aos primos que não são fatores de *N*, escolhia 1.

Então, naturalmente, mas com uma audácia matemática notável dada a falta de suporte teórico para lidar com rigor com somas infinitas[1], concluiu que a soma da série harmónica era o produto das somas das séries geométricas associadas aos primos … que são finitas como o Eduardo mostrou.

Como tinha suposto que o conjunto dos números primos era finito a soma da série harmónica seria finita o que contradizia o resultado do Leonardo! $\mathcal{Q}.\ \mathcal{E}.\ \mathcal{D}.$

Alice (*a quem as instalações da Gulbenkian e o brilho da prova de Euler inspiraram um lampejo luminoso*): -

Tenho uma ideia!

Para eles terem uma imagem sonora de como, no desenvolvimento de uma teoria matemática, a golpes de génio, proposições se vão associando para gerarem novas proposições, que desvendam novos territórios e lançam ainda mais luz sobre o universo conhecido, podemos terminar com uma grande obra musical onde inspiradas frases sonoras, aparentemente desgarradas, fazem delas brotar outras ainda mais sublimes.

Mostramos-lhes um vídeo de uma peça de um compositor que nasceu nos últimos anos de vida de Euler:

5.ª Sinfonia de **Ludwig van Beethoven**

pela

Orquestra de Viena conduzida pelo **Maestro Christian Thielemann**:

https://www.youtube.com/watch?v=yes8YOQnVQQ

---

[1] Esse suporte seria introduzido poucos anos depois, entre outros, por **Augustin-Louis Cauchy**: com a definição rigorosa da noção de limite foi possível dar sentido preciso a somas infinitas e estabelecer, com rigor, resultados que permitem operar com elas com segurança.