

2022 Março

deltaKappa

## Ainda a distância da Terra à Lua

O leitor/a lembrar-se-á de termos encontrado os Professores Manuela e Antunes, nos arredores de Viena, numa Taberna Heuriger, a discutir um problema de Kepler. Pois no dia seguinte, aproveitando a estadia nessa região, foram visitar a casa onde **Ludwig Van Beethoven** viveu no fim da sua vida e onde compôs algumas das suas sinfonias. E não haviam de ir! ... recordar alguém de quem se disse: "O resumo da sua obra é a liberdade".



Casa de Museu de Beethoven



O almoço em Heiligenstadt

Resolveram almoçar na lindíssima esplanada do restaurante: como música de fundo, idílica, suave, ouvia-se a Pastoral: [Beethoven – 6.ª Sinfonia \(PROMS 2012 - Barenboim\)](#)



Piano do Mestre

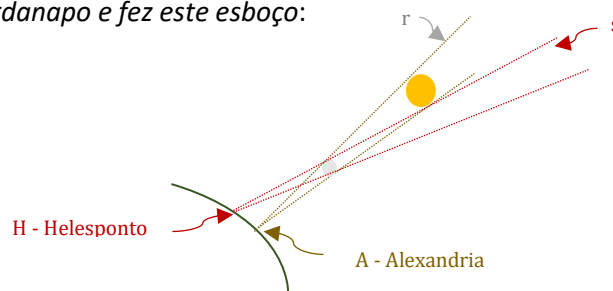
Pois não foi o seu espanto quando viram aparecer o seu colega Ernesto. Almoçaram juntos, em êxtase, com a música e o ambiente, e a conversa girou à volta da Matemática como não podia deixar de ser. Vamos ouvir extratos:

**Professora Manuela:** - Ó Antunes, só em fantasia podíamos conceber este encontro, que bom! Lembras-te da nossa conversa de Dezembro no Delta? Pois a Alice tem andado a insistir comigo para te convidar a explicares a forma como **Hiparco de Rodas** melhorou o valor obtido por **Aristarco de Samos**, uns anos antes, para a distância da Terra à Lua.

**Professor Antunes:** - Podíamos aproveitar este ambiente mágico para nos contares essa abordagem e a Manuela depois transmite à Alice.

**Professor Ernesto:** - Claro! Olha, a astúcia de Hiparco foi aproveitar as diferenças nos registos de observações de um eclipse do Sol, que ocorreu no ano 189 AC, em dois pontos que ele pensava situados perto do mesmo meridiano. Assim, conseguiu calcular o ângulo pelo qual, da Lua, se veria o arco de meridiano que liga esses dois pontos. Esses pontos eram: Alexandria, onde o eclipse foi total, e Helesponto onde apenas 1/5 do disco solar estava visível. Vejam só:

*Pegou num guardanapo e fez este esboço:*



Hiparco aproveitou o facto dos diâmetros aparentes da Lua e do Sol serem aproximadamente iguais.

Agora reparem, o ângulo das retas  $r$  e  $s$ , tangentes à superfície da Lua tiradas por A e H, é aproximadamente o ângulo pelo qual, da Lua, é visto o arco de meridiano AH.

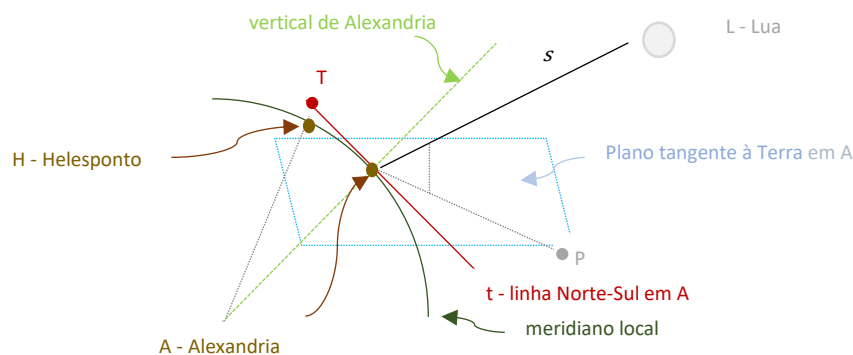
Se esse arco fosse igual ao diâmetro aparente dos dois astros, como acontece no esboço que fiz, o Sol estaria a descoberto em Helisponto. Se fosse metade desse ângulo o Sol estaria metade visível. Ou seja, vocês reconhecem que a fração do Sol que é visível em Helisponto é igual à fração do diâmetro aparente que o ângulo das duas retas,  $r$  e  $s$ , representa.

Como ele tinha calculado para o diâmetro aparente dos dois astros o valor de  $0,55^\circ$  concluiu que o arco de meridiano era visto, nesse instante, a partir da Lua, por um ângulo de  $1/5$  desse valor, ou seja, de  $0,11^\circ$ .

Ora ele conhecia a posição da Lua nos céus, a sua altura e azimute no instante do eclipse. Isso permitiu-lhe calcular o ângulo da direção Alexandria-Helisponto com a direção Alexandria-Lua.

Posso tentar imaginar como terá procedido<sup>1</sup>.

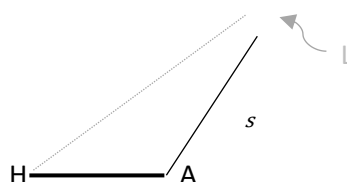
*E fez este esboço que a Professora Manuela, no fim, guardou com cuidado para mostrar à Alice...*



*... sublinhando que o ângulo TAP é o azimute da Lua e o ângulo PAL é a sua altura.*

**Professor Ernesto (continuando):** - Podia calcular o arco AH, em função do raio da Terra, a partir da diferença das latitudes de Alexandria e Helisponto, que teria calculado, provavelmente, como a diferença das alturas do Sol no seu zénite em dias próximos. Agora tinha, fixos num referencial ligado à Terra, os pontos A, H e a semirreta  $s$ . Claro que não conhecia a geometria cartesiana, mas é fácil entrever formas ao seu alcance, com as ferramentas que tinha na caixa e que não seriam muitas para além dos Teoremas de Pitágoras e Thales, da régua e do compasso, de calcular o ângulo de [AH] com  $s$ . Tentem que a Alice se coloque na pele de Hiparco e dê sugestões, é um exercício fantástico, no cerne da experiência da descoberta em matemática: avançar com o que se tem à mão ...

Conhecido ângulo de [HA] com  $s$  podia fazer, num qualquer suporte plano, este desenho:



E bastava-lhe procurar o ponto L de  $s$  para o qual o ângulo ALH fosse de  $0,11^\circ$ .

**Professora Manuela:** - Estou a ver! Se chamasse  $l$  ao comprimento do segmento de reta que liga Alexandria a Helisponto expresso em função do raio da Terra podia obter a escala  $\frac{l}{AH}$  do esboço...

<sup>1</sup> O que se segue são conjeturas do Ernesto ...

**Professor Antunes** (*não se contendo ao deslumbrar o resultado*):

- ... e, multiplicando  $\overline{AL}$  por  $\frac{l}{AH}$ , obtinha finalmente a distância da Terra à Lua em função do raio da Terra!

*A Pastoral já ia no quinto andamento, era um agradecimento dos pastores aos deuses pelo fim da tempestade, andamento que todos desejariam que fosse oportuno agora, dado os tempos apocalípticos que atravessavam, mas a Professora Manuela ainda acrescentou:*

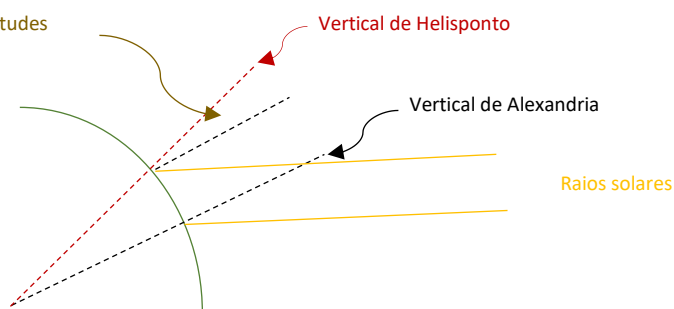
**Professora Manuela:** - Sabes que o Leonardo tem andado a fazer-me perguntas sobre a soma dos inversos dos primos ...

**Professora Ernesto:** - Ainda bem, tenciono falar sobre isso num dos próximos problemas ou deltaKappa. O homónimo dele, Euler, também se debruçou sobre o tema.

*Vamos esperar ...*

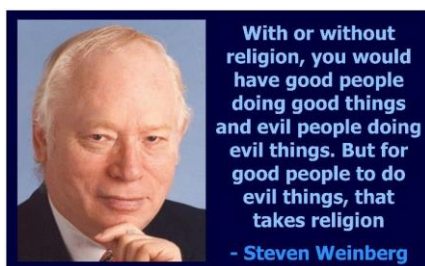
**Nota:**            **O cálculo da diferença de latitudes por observação do Sol**

Variação da altura do Sol = Diferença de latitudes



**Ainda, um desafio a propósito dos tempos que correm...**

*Para ginastigar o raciocínio lógico, deixo-lhe aqui, caro leitor/a, uma boa oportunidade: tente avaliar o valor lógico do silogismo da direita admitindo que o da afirmação de Weinberg é 1.*



*É sabido que Putin não é religioso,*

*Putin faz monstruosidades*

*ergo*

*Vladimir é pessoa maligna.*

**Nota final**

*A ideia do aproveitamento por Hiparco de duas observações de um eclipse solar, em Alexandria e em Helespono, para o cálculo da distância Lua foi extraída do livro*

**Explicar o Mundo de Steven Weinberg**

*As congeminações do Ernesto foram as do autor desta rubrica.*