2022 Abril

deltaKappa **O Crivo de Eratóstenes e a Soma dos Inversos dos Primos**

Seis da manhã! O Professor Ernesto acorda com o despertador, cheio de sono, espreguiça-se e começa a rever o dia consigo mesmo. Levantou-se para tomar o pequeno-almoço e refletir…


Professor Ernesto (*falando com os seus botões*): - Isto é que vai ser! Falar da soma dos inversos dos primos a três jovens promissores … não vai ser pera doce. Ou tenho cuidado ou vou ficar a falar com as gaivotas, pois não foi esta a ideia sugerida pelo PR para nos divertirmos quando nos falta a audiência?! E, pior do que isso, eles tão cedo não iriam conseguir ouvir falar desses números.

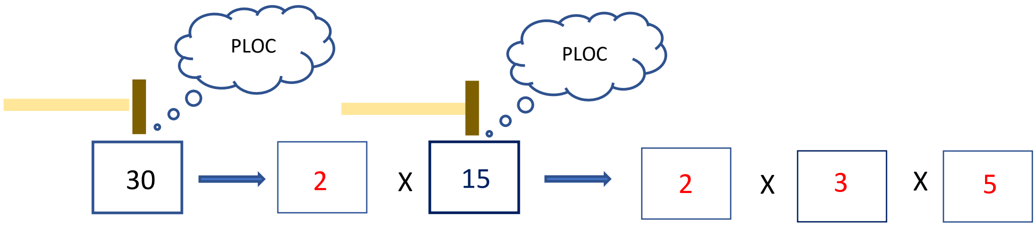
E, de seguida, encheu o peito e dirigiu-se ao Seagull Café, na praia onde tinha combinado encontrar-se com a Alice, o Leonardo, o Eduardo e com o colega Antunes.

Depois de encomendarem cafés, bem quentinhos, o Professor Ernesto sorriu e, virando-se para a Alice, disse:

Professor Ernesto: - Ora diz-me cá, sabes o que é um número primo?

Alice: - Acho que sim, mas gostava muito que me explicasse, com rigor, mas de forma sugestiva.

O Ernesto pegou num guardanapo e fez este esboço:



Repara neste **Martelo Mágico**, martelo a que vou chamar **Martelo TFA**: quando bate num inteiro maior do que um, se ele for produto de dois números inferiores a ele, ele parte-o num desses pares de números; e mais, … se algum destes ainda for um produto de dois que lhe são inferiores volta a atuar para o partir em dois e assim por diante: o processo não para até ficarem apenas números que o martelo já não consegue partir.

Estes números finais, que resistem a qualquer martelada, são os **números primos**, **números primeiros**, os blocos constitutivos do número inicial.

Claro! … se o número inicial, superior a um, não se partir, então é um número primo.

E esta é uma **definição rigorosa**: Um inteiro, maior ou igual a dois[1], é primo se, e só se, não se puder escrever como produto de dois inteiros positivos menores do que ele.

[1] 1 não se considera primo para garantir a unicidade de representação de um inteiro como produto de primos. Se 1 fosse primo: 2 = 2 e 2 = 1 x 2

E a forma de escrever o número como produto de fatores primos é única, a menos é claro da ordem por que escreveres esses fatores. Este resultado é o **Teorema Fundamental da Aritmética,** nome que me inspirou para o nome do nosso **Martelo**, o **TFA**, que opera até obter a decomposição do número num produto de primos.

Os números primos estão cheios de propriedades espantosas e de mistérios, muitos por esclarecer. Mas antes de vos falar de alguns deles vou desafiar-vos a escrever um programa para obter os números primos inferiores a um certo N, um N que não engasgue o processador.

O processo data de há 2200 anos e visa eliminar os não primos de uma lista com os inteiros de 1 a N:

i) Vocês começam por criar uma lista com N entradas que preenchem com os números de 1 a N; A ideia, agora, é colocar a zero as entradas com não primos:
ii) 1 não é primo -> põem a zero;
iii) Põem a zero as entradas que contêm um múltiplo de dois, distinto de dois: eliminam assim todos os não primos com o fator dois;
iv) Põem a zero as entradas que contêm um múltiplo, diferente dele próprio, da menor entrada k, não nula, na lista a seguir ao dois: eliminam assim todos os não primos com o fator k;
v) E repitam iv) até que k x k seja superior a N: este novo k já não iria eliminar não primos na vossa lista!

No fim, ficam com os primos inferiores ou iguais a N na lista. Construíram um crivo algorítmico que seleciona todos os primos na lista dos números de 1 a N: o Crivo de Eratóstenes, o célebre Diretor da Biblioteca de Alexandria, o tal que mediu o raio da Terra[2].

E, já agora, no fim, contem quantos primos ficaram na lista e calculem: a soma dos seus inversos, que nos vai interessar, quantos inversos foi necessário somar para atingir 2, quantos para atingir 2.5, quantos para atingir 3. E, claro, imprimam estes resultados.

A Alice e o Eduardo, empolgados, pegaram de imediato no note-book e lançaram mãos à obra com energia: iam programar **O Crivo de Eratóstenes**.

Vamos acompanhar as linhas de código que foram escrevendo e os comentários que foram deixando:

```
[START]
INPUT "Qual o número P para o qual pretende obter os primos que são menores ou iguais a ele? " ; P
If P > 18*10^6 then
Print "Deve introduzir um valor não superior a 18*10^6 para não engasgar o processador"
Goto [Start]
end if
'Criamos a lista N, com P entradas, que preenchemos com os números de 1 a P
dim N(P)
for i = 1 to P
    N(i) = i
next i
'Colocamos a primeira entrada a zero, pois 1 não é primo, e fazemos k igual ao primeiro primo na lista, ou seja, 2
N(1)=0
k=2
'Fazemos L igual ao maior número inteiro que multiplicado por k é menor ou igual P
L=INT(P/k)
'Colocamos a zero as entradas com o produto por k de um fator maior ou igual a k
while  k <= L
       for i = k to L
           j = k * i
           N(j) = 0
           next i
'Procuramos o próximo primo k na lista, a primeira entrada superior ao atual k que não foi reduzida a zero
       i=1
       while N(k+i)=0
              i=i+1
       wend
'O novo k
       k=k+i
'Calculamos o novo L
      L=INT(P/k)
wend

'E aqui termina o nosso Crivo: com estas linhas de código já conseguimos a lista de primos
```

[2] Se tiver interesse em saber como pode consultar o deltaKappa de Novembro de 2021 aqui.

```
'Agora imprimimos os resultados
    np = 0
    S = 0
    T = 1
    for i = 2 to P
      if N(i) <> 0 then
        np = np+1
        S = S + 1/N(i)
        If S >=  T then
          Print "Atingiu "; T; " ao fim de  "; np; "termos"
          T = T + 0,5
        end if
      end if
    next i
          print  "Atingiu  "; S; "ao fim de  "; np; " termos: o número de primos não superiores a  "; P
    end
```

Alice: - Estou cheia de curiosidade para ver o resultado quando corrermos o programa com o maior valor que admitimos, 18 x 10^6.

Experimentaram e o resultado foi este:

Atingiu 2 ao fim de 59 termos   Atingiu 2.5 ao fim de 1413 termos   Atingiu 3 ao fim de 361139 termos
Atingiu 3.07727769 ao fim de 1151367 termos: o número de primos inferiores a 18.000.000

Professor Ernesto: - Estão a ver a quantidade de inversos de primos que é necessário somar para chegar a 3. E para passar de 3 a 3.0773 são necessários ainda mais de 790.000 parcelas!

Mais, para chegarem a 5 iam precisar de somar muito mais de 10^{75} termos da série dos inversos, número que é o cubo de uma estimativa para o número de estrelas no universo conhecido.

Eduardo: - Com tanta dificuldade em crescer, a soma de todos os inversos é bem capaz de ser finita! … ou não será?

Professor Antunes: - Vocês lembram-se de termos visto[3] que a soma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$, a chamada séria harmónica, não é finita. E também vimos que a soma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$, série geométrica de razão $\frac{1}{2}$, é finita com o valor 2, o que significa que retiramos da série harmónica suficientes termos para atenuar, de forma decisiva, o seu crescimento ficando impedida de crescer para além de valores arbitrariamente grandes. Será que com os inversos dos primos se passa algo parecido? A resposta deve estar relacionada com a forma como os primos se distribuem na reta real.

Alice (*lembrando-se da fórmula da diferença de quadrados ou do gráfico de $y = x^2$*): - Existem segmentos de inteiros de comprimento arbitrariamente grande que não são quadrados perfeitos e esses correspondem a parcelas da série harmónica que não contribuem para a soma da série geométrica. Um desbaste na série harmónica que pode ajudar a explicar porque é que a soma dos inversos dos quadrados não cresce sem limite.

Professor Ernesto: - Mas sabes que o mesmo se passa com os primos. Também há segmentos de naturais de comprimento arbitrário "sem primos". Queres um com $10^{10^{10}}$inteiros consecutivos não primos? Encontra-se! E nesses segmentos, como bem disseste, não havendo primos, não há parcelas para integrar a soma dos inversos.

Professor Antunes (*entrevendo a perplexidade*): - Se quiserem encontrar uma sequência de comprimento N sem primos basta obterem o número N+1! Nenhum dos N números de N+1! + 2 a N+1! + N+1 é primo.

Eduardo: - Estou a ver, se tomarmos N+1! + *p*, com $2 \leq p \leq N+1$, este *p* divide N+1!

Leonardo: - O problema é saber se a supressão, na série harmónica, de segmentos de comprimento arbitrário é condição suficiente para manter a soma da série finita. Se vires bem, apesar desses desertos de primos a soma dos inversos dos primos ainda consegue atingir 3. A série geométrica não passa de 2. E sabemos que atinge 5. A nossa série mostra-se "resiliente" no seu crescimento!

---

[3] Pode ver no deltaKappa de Fevereiro de 2022: aqui.

Eduardo: - Será? … parece um problema bicudo! Diretamente não conseguimos provar que a resiliência se mantém, que a soma dos termos da série cresce além de todo o N: não conseguimos somar um número arbitrariamente grande de parcelas, qualquer computador ficará engasgado e o nosso tempo não é eterno.

Leonardo: - Qual será o aspeto crítico na distribuição dos primos que permitirá esclarecer este crescimento?!

Professor Ernesto: - Parece bicudo e é, de facto, bicudo! … ora vamos lá ver se consigo dar-vos uma ideia da solução para este mistério…

Caro leitor, fica em suspenso, vamos saber o que vai dizer o Professor Ernesto no próximo deltaKappa onde retomaremos o relato desta conversa no esplendor do Seagull Café; acho que vai voltar a ouvir falar de Leonhard Euler.

E, quem sabe, conhecer mais alguns dos mistérios dos primos…