2022 Maio

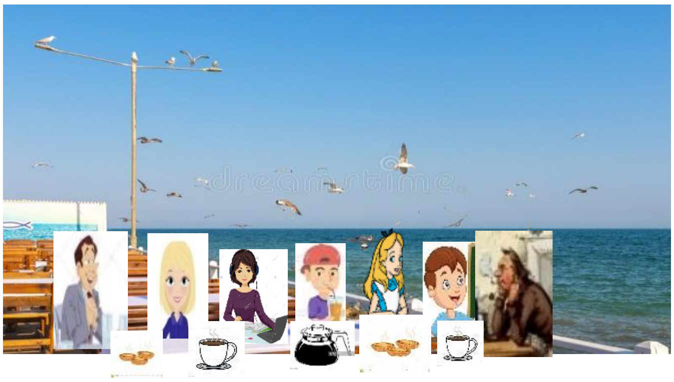
deltaKappa Euler e a Soma dos Inversos dos Primos – Episódio II

Junto ao mar, um banho de Matemática

"Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn"

(Benjamin Franklin)

Veja só quem se juntou à conversa que começámos a relatar no último mês: pois nada menos do que a nossa conhecida Professora Manuela e, ainda, a Sara, a irmã mais velha da Alice que gosta tanto de matemática.



Vieram assistir, e participar, no desvendar do mistério que deixámos em suspenso (*ver* aqui): a soma dos inversos dos primos cresce para além de todo o limite ou não ultrapassa um certo real L?

Depois dos cafezinhos e bolos da praxe o Professor Antunes retomou as "hostilidades":

Professor Ernesto: - Estive a ponderar a melhor forma de vos contar o fim desta aventura e acabei por concluir que o melhor é mesmo ir beber à fonte, procurar como pensou o pioneiro, aquele que primeiro atacou, com êxito, este problema. Se vocês gostam de raciocínios sólidos, de clareza meridiana, são capazes de sentir vertigens! Seguir o pensamento de **Leonhard Euler**, pois é dele que se trata, oferece a mesma segurança que experiencia quem caminha com os pés bem assentes … no ar, mas a mesma sensação mágica com que se vê coelhos a sair da cartola.

Alice (*rindo*): - Vou-me agarrar à cadeira!

Professor Ernesto: - Bem podes, vais ver como o nosso homem superava a falta de suporte teórico para obter provas rigorosas com uma intuição de génio.

Pois Euler começou por designar por X a série harmónica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$.

E notou que se subtraísse de X a série $\frac{1}{2}X$ eliminava as parcelas cujo denominador é um múltiplo de 2:

$$X-\frac{1}{2}X \overset{(!)}{=} \frac{1}{2}X = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots.$$

Agora, todo o múltiplo de três que não é múltiplo de dois pode obter-se multiplicando por três um inteiro que não é múltiplo de dois. Assim, se subtraísse desta última série um terço dela eliminava as parcelas cujo denominador é um múltiplo do primo 3: $\frac{1}{2}X-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}X) = \frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times X = \frac{1\times 2}{2\times 3}\times X = 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$.

Fazendo o mesmo com o próximo primo, se subtraísse $\frac{1}{5}X$ ia obter: $\frac{1\times 2}{2\times 3}\times X-\frac{1}{5}\times\frac{1\times 2}{2\times 3}X = \frac{1\times 2}{2\times 3}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times X = \frac{1\times 2\times 4}{2\times 3\times 5}\times X = 1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ eliminando as parcelas cujo denominador é um múltiplo de 5.

E notou a lei de formação: quando subtraísse as parcelas cujo denominador é um múltiplo de um primo p obtinha o resultado multiplicando o anterior por $\frac{p-1}{p}$.

Finalmente, com uma audácia notável, admitiu que se procedesse deste modo indefinidamente ia obter… 1, o único termo da série harmónica que não era eliminado.

E, sem se fazer rogado, escreveu a igualdade:

$$\frac{1\times2\times4\times6\times\ldots\times(p-1)\times\ldots}{2\times3\times5\times7\times\ \ldots\times p\times\ \ldots}X = \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{p}\right)\times\ldots\right]X = 1 \qquad \text{ou}$$

$$X = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \prod_{p\in P}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

Vejam só: não há recurso a qualquer teorema, tudo parece preso por arames, e, no entanto, tudo parece tão natural…

Sara (*surpreendida, pois não tinha assistido à última conversa*): - Que resultado espetacular! …

Alice: - Essa é a fórmula que estabelecemos na prova de existência de infinitos primos (*ver* aqui). Mas aí estávamos a supor, por absurdo, o conjunto dos primos finito e a dedução era lógica. Aqui é estranho, o resultado aparece um bocado aos trambolhões! Que magia!

Professor Ernesto: - Espetacular, estranho!? … mas genial! Esperem para ver, que o circo vai continuar!

Professor Antunes: - Esse enorme produto parece estar mesmo a pedir um tratamento logarítmico…

Professor Ernesto: - Pois queres saber que esse foi o próximo passo na abordagem de EULER?!

Ele igualou os logaritmos de ambos os membros da igualdade:

$$\log\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = -\sum_{p\in P}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Eduardo: - Ó Professor, mas a série harmónica não tem soma finita, o logaritmo no primeiro membro não existe.

Professor Ernesto: - Ora aí está, a mão do Grande Mestre: o que ele está a significar é que o segundo membro da igualdade se torna arbitrariamente grande quando o *p* percorre o conjunto dos números primos.

E agora reparem no próximo golpe magistral: trabalhando em cima dos resultados de **Isaac Newton**, do seu célebre Binómio e da sua generalização para potências de expoente fracionário, Euler tinha obtido a igualdade:

$$\log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad \ldots\text{(para } |x|<1)$$

E foi esta igualdade que ele aplicou a cada um dos termos do somatório substituindo x por $\frac{1}{p}$:

$$\log\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{p\in P}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}+\frac{1}{4p^4}-\cdots\right] \qquad (1)$$

Professora Manuela (*impulsionada por uma luz que, de súbito, se acendeu na sua mente…*): - Vejam só, a soma, para todo o *p* primo, do primeiro termo dentro dos parênteses retos é exatamente a nossa soma dos inversos dos primos!

Professor Antunes: - Brilhante Manuela, talvez lhe tenha ocorrido calcular a soma de todos os outros termos para todos os primos: se for finita a nossa soma será infinita!

Professor Ernesto: - Nem mais Antunes, foi exatamente o que ele fez, e era essa a ideia.

Talvez vocês não saibam, mas ele, com apenas 28 anos, tinha resolvido o célebre **Problema de Basileia**, um problema que tinha resistido às mentes mais brilhantes da altura e que consistia em calcular a soma:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

para a qual obteve o valor de $\frac{\pi^2}{6}$.

Se somássemos só as parcelas para *n* primo claro que o valor seria inferior a esse. Mas isso era $\sum_{p\in P}\frac{1}{p^2}$, que era finita, portanto.

Ora, para cada primo p e $k > 2$ é: $\frac{1}{p^k} < \frac{1}{p^2}$, logo $\sum_{p\in P} \frac{1}{p^k}$ seria também finita.

Chamando S_k a $\sum_{p\in P} \frac{1}{p^k}$ e somando os parênteses retos em (1), parcela a parcela, ele pôde escrever:

$$\log \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{p\epsilon P} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{4} S_4 + \cdots + \frac{1}{k} S_k + \cdots$$

Leonardo (*depois de abrir os olhos de espanto para a igualdade*): - A soma das parcelas com S's não parece fácil de avaliar!

Professor Ernesto: - E não é! Mas o nosso Leonhard, sem que se saiba o que lhe passou pela cabeça, deu-a como uma soma finita: e acertou! O homem não tinha base teórica para lidar com rigor com somas infinitas, mas tinha um faro genial, ou um raciocínio que escapa aos demais!

E concluiu que a soma dos inversos dos primos é infinita: se fosse finita $\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ seria finito e a série harmónica seria convergente!

Sara (*intrigada*): - Mas como é que sabemos que a sua intuição estava certa, que a soma das parcelas com S's é finita? Será que ele…

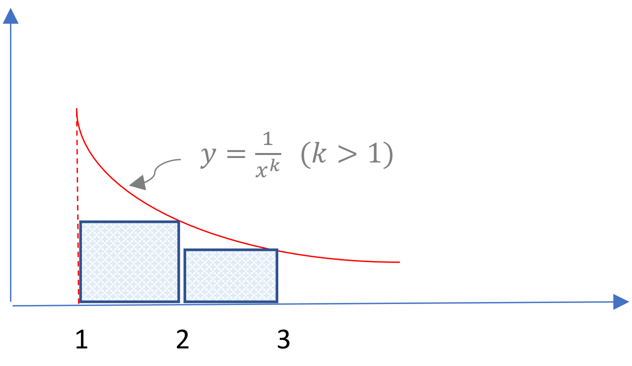
Leonardo (*lembrando-se subitamente de alguém parecido*): - Não me diga, que como o grande Pierre de Fermat, fazia anotações nas margens do que escrevia referindo que tinha provado resultados que levaram centenas de anos e o esforço de muitos génios a obter!

Professor Ernesto: - Não foi bem isso, neste caso o esclarecimento era muito mais simples. Bom, como vocês já sabem rudimentos de Cálculo Integral posso explicar-vos. Os outros podem ir tomar uma banhoca no mar que parece estar estupendo.

Sara e Leonardo (*ao mesmo tempo*): - Vamos a isso… à explicação queremos dizer… *e sorriram*!

Professor Ernesto (*depois de fazer o esboço abaixo*): - Reparem nesta figura: os retângulos a sombreado têm base 1 e altura dada pelo valor de y no extremo superior da base.

A soma das suas áreas é, portanto, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.



E vocês facilmente reconhecem que este valor é inferior à área da região limitada pelo eixo dos xx's, pela reta x = 1 e pela componente do gráfico de $y = 1/x^k$ no primeiro quadrante.

Ora esta última área é dada por: $\text{Área} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\, dx$, igual a $\frac{1}{k-1}$ pela velha Regra de Barrow.

E concluímos assim que as somas $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ são finitas e inferiores a $\frac{1}{k-1}$.
Ora, para obter S_k, adicionamos, nesta série, apenas as parcelas correspondentes aos primos e, assim, é: $S_k < \frac{1}{k-1}$.

Então podemos escrever:

$$\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4+\cdots+\frac{1}{k}S_k+\cdots<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\cdots<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Mas esta última série acabamos de ver que tem soma finita, aliás é a série cuja soma era o objeto do Problema de Basileia e cujo valor, $\frac{\pi^2}{6}$, Euler calculou.

Cá está, Euler acertou, esta “combinação linear infinita” dos S’s é, de facto, finita e, portanto, a nossa soma é infinita!

Caro leitor/a … mal o nosso Professor tinha acabado já os dois estavam a mergulhar no mar.

Bibliografia, para quem quiser “mergulhar” mais fundo nos meandros das raízes históricas desta prova:

Princípios Matemáticos de Filosofia Natural – Isaac Newton
Euler, The Master of Us All – William Dunham