Título: L´Hopital para Leibniz

Os leitores que já passaram pelo 12º ano usaram, entre outras uma notação para a derivada de uma função f. A primeira derivada representaram por $\frac{df}{dx}$, a segunda por $\frac{d^2f}{dx^2}$, a terceira por $\frac{d^3f}{dx^3}$, etc. Habituamo-nos a associar as derivadas sucessivas a ordens de derivação inteiras. No entanto, pouco depois da invenção (ou descoberta) do cálculo por Newton e Leibniz se questionou a possibilidade de se considerar derivadas de ordem não inteira e possivelmente até negativas, por exemplo,

$$\frac{d^{1/2}f}{dx^{1/2}}, \frac{d^{-1}f}{dx^{-1}}$$

L´Hopital numa carta escrita a Leibniz em 1695 questiona este sobre o sentido das derivadas de ordem não inteira. Estava lançada a primeira pedra do que haveria de se chamar mais tarde o Cálculo Fraccionário (CF). No entanto, o estudo sistemático do CF apenas começa em princípios/meados do século XIX por Liouville.

Consideremos a função $f(x) = x^k$. Temos que $\frac{d^a f}{dx^a} = \frac{k!}{(k-a)!}x^{k-a}$. Como é sabido, a função fatorial tem uma relação com a Gama no sentido que a função fatorial coincide com a Gama nos inteiros positivos ($\Gamma(n+1) = n!$) e assim estende-se a derivada de ordem a a qualquer real positivo escrevendo-se então,

$$\frac{d^a f}{dx^a}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}x^{k-a}, k \geq 0.$$

Por exemplo, a *meia* derivada de x é,

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}.$$

As derivadas fracionárias de funções constantes não são necessariamente zero, sendo $f(x) = x^0$, veja-se,

$$\frac{d^{1/2}x^0}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{0-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}$$

e no caso dos expoentes negativos? Bem usando (e abusando) a ideia que o integral é uma anti-derivada define-se,

$$\frac{d^{-1}f}{[dx^{-1}]} = \int_0^x f(y)dy$$

Estendendo a qualquer inteiro negativo fica,

$$\frac{d^{-n}f}{[dx]^{-n}} = \int_0^x dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_0^{x_2} dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0$$

Para poder ter outros limites inferiores que não zero, define-se,

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

Note agora que em geral,

$$\frac{d^{-n}f}{[dx]^{-n}} \neq \frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}}.$$

Serve a contribuição desta semana para abrir o apetite. Dada a importância deste assunto e a intensa investigação que se faz dele voltaremos a ele no próximo mês e teremos tempo para trabalhar alguns exemplos.

Até lá boas contas e sejam felizes.